Introdução à Ciência de Dados Quântica

Luís Soares Barbosa

Licenciatura em Ciência de Dados
Universidade do Minho

Folha de Exercícios 2

Questão 1

O algoritmo de Deutsch que estudou permite determinar a paridade de dois bits à partida desconhecidos ($f(0)$ e $f(1)$ para $f : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{2}$), i.e., o valor da expressão $f(0) \oplus f(1)$, ou, equivalentemente, se o número de ocorrências de 1 é par ou ímpar.

Suponha que tem uma sequência de n bits $b_0, b_1, b_2, \cdots b_{n-1}$ e pretende determinar a respectiva paridade recorrendo ao algoritmo de Deutsch. Considere os casos em que n é par ou ímpar. Explique como o poderia fazer e indique quantas consultas à sequência seriam necessárias.

Questão 2

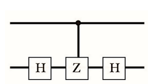
Como sabe, qualquer porta quântica unária Q origina uma porta binária C_Q em que a aplicação de Q ao segundo qubit é condicionada pelo valor do primeiro qubit. O operador correspondente pode ser escrito como

$$C_Q|x\rangle|y\rangle \;=\; |x\rangle \otimes Q^x|y\rangle$$

1. Mostre que o operador C_Q é unitário sempre que Q o fôr.

2. Calcule a representação matricial de C_Z onde Z é uma das portas de Pauli definida por $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$.

3. O circuito seguinte implementa o operador $CNOT$ que constitui a versão controlada da porta X.



Preencha as reticências na seguinte prova desse facto, completando de forma clara e completa as justificações de cada passo.

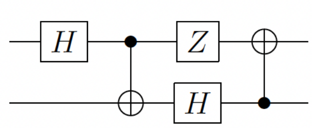
$$
\begin{array}{rl}
& CNOT|x\rangle|y\rangle \\
= & \quad \{\ \cdots\ \} \\
& |x\rangle \otimes X^x|y\rangle \\
= & \quad \{\ X = HZH\ \} \\
& |x\rangle \otimes (HZH)^x|y\rangle \\
= & \quad \{\ \cdots\ \} \\
& |x\rangle \otimes HZ^xH|y\rangle \\
= & \quad \{\ \cdots\ \} \\
& I \otimes H \cdot C_Z \cdot I \otimes H
\end{array}
$$

Questão 3

Mostre que ao desenhar um circuito de controlo de uma porta Z é indiferente fazer o controlo pelo primeiro ou pelo segundo qubit. Será que este facto pode ser generalizado a outras portas?

Questão 4

Considere o seguinte circuito



1. Calcule a matriz U correspondente e mostre que é unitária.
2. Desenhe um circuito que corresponda a U^{-1}.

Questão 5

---

1. Mostre que $\{|++\rangle, |--\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle\}$ é uma base para $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ e calcule o efeito de H sobre estes vectores.
2. Explique por que razão
$$H \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{b_1, z_1 \in 2} (-1)^{b_1 z_1} |z_1\rangle\langle b_1|$$
3. Qual a representação matricial de $H \otimes H$?
4. Calcule $H \otimes H \otimes H\, |000\rangle$ e indique quais os possíveis resultados de uma medição do estado resultante e com que probabilidades.
5. Mostre que
$$H^{\otimes n}|b\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2^n}} \textstyle\sum_{z \in 2^n} (-1)^{b \cdot z} |z\rangle$$
onde $x \cdot y = x_1 y_1 \oplus x_2 y_2 \oplus \cdots x_n y_n$, para $x, y \in 2^n$ e a justaposição representa a operação lógica de conjunção.

Questão 6

Considere a seguinte porta quântica operando sobre 3 qubits:

$$|abc\rangle \;\mapsto\; |a, b, c \oplus (a \wedge b)\rangle$$

1. Construa a sua representação matricial.
2. Proponha uma representação gráfica na linguagem dos circuitos que traduza para esta porta e justifique a sua escolha.

Questão 7

O primeiro qubit no estado obtido no final do circuito que implementa o algoritmo de Bernstein-Vazirani, antes de qualquer medição, é

$$\sum_{z \in 2^n} \sum_{z' \in 2^n} (-1)^{z \cdot (s \oplus z')} |z'\rangle$$

Suponha que $n = 3$ e considere um valor z' tal que $z' \neq s$ e $z' \oplus s = 001$. Mostre que a amplitude associada a $|z'\rangle$ é 0.