Computação Quântica

Luís Soares Barbosa

Mestrado em Engenharia Física
Universidade do Minho

Folha de Exercícios 5

É objectivo desta Folha de Exercícios introduzir o problema da estimativa de valores próprios de operadores quânticos, uma ilustração típica de utilização da transformada de Fourier quântica

---

Questão 1

Recorde o enunciado do teorema espectral: Para toda a matriz normal M, de dimensão N, existe uma base ortonormada $\{|v_0\rangle, |v_1\rangle, \cdots, |v_{n-1}\rangle\}$ tal que

$$M \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k |v_k\rangle\langle v_k|$$

A matriz M é vulgarmente referida como uma *decomposição espectral*.

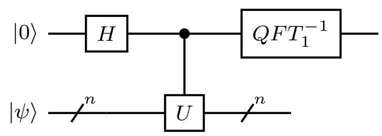
1. Mostre que as matrizes unitárias e as Hermitianas são normais.
2. Mostre que cada par $(\lambda_k, |v_k\rangle)$ é um par de valor/vector próprio de M.
3. Será $I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$ a única decomposição espectral da matriz identidade?
4. Mostre que
$$H \;=\; |\phi_{\frac{\pi}{8}}\rangle\langle\phi_{\frac{\pi}{8}}| + |\phi_{\frac{5\pi}{8}}\rangle\langle\phi_{\frac{5\pi}{8}}|$$
onde $|\phi_\theta\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$.
5. Diga por que razão o valor absoluto de qualquer valor próprio de um operador unitário é 1.

Questão 2

O problema da *estimativa de valores próprios* formula-se da seguinte forma: Dado um circuito quântico correspondente a uma operação unitária U sobre n-qubits, e um estado quântico $|\psi\rangle$ em n-qubits que seja um vector próprio de U, determine uma aproximação ao número $\phi \in [0, 1[$ tal que

$$U|\psi\rangle \;=\; e^{i2\pi\phi}|\psi\rangle$$

Supondo que temos apenas um qubit disponível, é fácil mostrar que o circuito

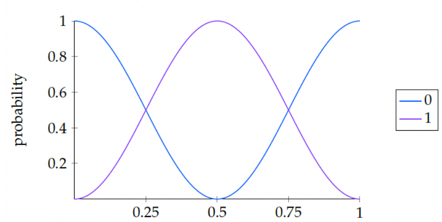


determina exactamente ϕ se o valor próprio $e^{i2\pi\phi} \in \{0 \cdot \frac{1}{2}, 1 \cdot \frac{1}{2}\}$.

Por exemplo,

$$
\begin{aligned}
|0\rangle\,|\psi\rangle &\mapsto_{H\otimes Id} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\,|\psi\rangle \\
&\mapsto_{cU} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\,|\psi\rangle + |1\rangle\, U\,|\psi\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\,|\psi\rangle + e^{i2\pi\phi}\,|1\rangle\,|\psi\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\,|\psi\rangle + e^{i2\pi\frac{x}{2}}\,|1\rangle\,|\psi\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\,|\psi\rangle + \omega^{1\cdot x}\,|1\rangle\,|\psi\rangle) \\
&\mapsto_{QFT_1^{-1}\otimes Id} |x\rangle\,|\psi\rangle
\end{aligned}
$$

1. Determine o estado quântico à saída do circuito.
2. Mostre que a probabilidade de obter como resultado 0 ou 1 em função do valor de ϕ é dada, respectivamente, por $\cos \pi\phi$ e $\sin \pi\phi$, o que pode ser ilustrado no seguinte diagrama.



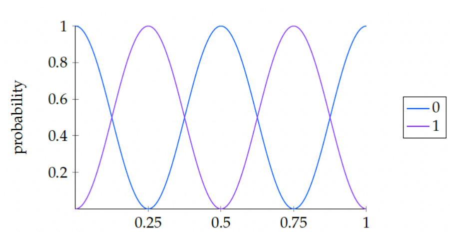
3. Discuta a afirmação: *Intuitivamente, o resultado da medição do circuito é uma estimativa para o valor de ϕ com um bit de precisão.*

Questão 3

O que acontece se expandirmos o circuito acima representado com a execução controlada de outra cópia de U?

Note que ter duas cópias controladas de U compostas sequencialmente é equivalente a um operador U^2 controlado no mesmo qubit. Então, se $|\phi\rangle$ fôr um vector próprio de U, com $e^{i2\pi\phi}$ como valor próprio, então é-o ainda de U^2, mas agora com valor próprio $e^{i2\pi(2\phi)}$.

1. Mostre que este circuito realiza a mesma computação do anterior com ϕ substituído por 2ϕ.
2. Comente o seguinte gráfico da evolução das probabilidades com que 0 ou 1 são obtidos:



3. Explique por que razão este circuito obtém, de facto, uma estimativa para o segundo qubit de ϕ (se arredondarmos ϕ para dois bits).

Repare, agora, que ao combinarmos estes dois circuitos, considerando dois qubits auxiliares, reconhecemos o circuito utilizado no algoritmo para determinação da fase de um estado quântico. Esta discussão continua nos slides da próxima aula T.