Computação Quântica

Luís Soares Barbosa

Mestrado em Engenharia Física
Universidade do Minho

Folha de Exercícios 4

Questão 1

O número complexo

$$\omega_n \ = \ e^{i2\pi\frac{1}{2^n}}$$

usado na descrição dada nas aulas da QFT, representa uma rotação de $\frac{2\pi}{2^n}$ radianos, dividindo o círculo unitário em 2^n fatias.

Os pontos correspondentes no círculo correspondem às *raízes da identidade de ordem* 2^n, i.e. às soluções da equação

$$z^{2^n} \ = \ 1$$

que se distribuem no círculo unitário uniformemente espaçadas em ângulos múltiplos de $\frac{2\pi}{2^n}$ radianos:

$$\omega_n^0 = 1, \omega_n, \omega_n^2, \omega_n^3, \cdots, \omega_n^{2^n-1}$$

1. Calcule as raízes da identidade de ordem 4 e represente-as no círculo unitário.
2. Mostre que $\omega_2^2 = \omega_1$, e, em geral, , $\omega_n^2 = \omega_{n-1}$.

Questão 2

Pretende-se neste exercício revisitar a construção recursiva de QFT_n, para $n \geq 2$ qubits, partindo da sua formulação mais clássica:

$$QFT_n|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} \omega_n^{x \cdot y}|y\rangle$$

que é, obviamente, equivalente à estudada com detalhe as aulas teóricas, i.e.,

$$QFT_n|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \omega_n^{2^{n-1}\cdot x}|1\rangle) \otimes \cdots \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \omega_n^{1\cdot x}|1\rangle)$$

A construção recursiva procede da seguinte maneira a partir do estado $|x\rangle|a\rangle$ com $x \in [0, 2^{n-1} - 1]$ e $a \in \mathbf{2}$

- Aplicar QFT_{n-1} a x, obtendo

$$(QFT_{n-1}|x\rangle)|a\rangle \ = \ \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \sum_{y=0}^{2^{n-1}-1} \omega_{n-1}^{x \cdot y}|y\rangle|a\rangle$$

- Recorrer ao qubit auxiliar para afectar cada um dos estados de base $|y\rangle$ nos restantes $n-1$ qubits com a fase ω_n^y, obtendo

$$\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \sum_{y=0}^{2^{n-1}-1} \omega_{n-1}^{x\cdot y} \omega_n^{a\cdot y} |y\rangle|a\rangle$$

- Aplicar uma porta de Hadamard ao qubit menos significativo, obtendo

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^{n-1}-1} \sum_{b=0}^{1} (-1)^{a\cdot b} \omega_{n-1}^{x\cdot y} \omega_n^{a\cdot y} |y\rangle|b\rangle$$

- Permutar a ordem dos qubits de forma que o menos significativo passe a ser o mais significativo e os restantes sejam deslocados uma posição para baixo, resultando em

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^{n-1}-1} \sum_{b=0}^{1} (-1)^{a\cdot b} \omega_{n-1}^{x\cdot y} \omega_n^{a\cdot y} |b\rangle|y\rangle$$

1. Certifique-se de que entendeu completamente o procedimento acima descrito.
2. Aplique-o para construir QFT_5 e desenhe o circuito correspondente.

Questão 3

É possível verificar que QFT_n é uma porta unitária construindo, como se fez nas aulas teóricas, um circuito quântico unitário que a implemente. Neste exercício, porém, pertende-se verificar essa propriedade mostrando que QFT_n, como todas as portas unitárias, preserva o produto interno. Assim, mostre que

$$(U|v\rangle, U|u\rangle) \;=\; \langle v|U^\dagger U|u\rangle \;=\; \langle v, u\rangle$$

para

$$U|x\rangle \;=\; QFT_n|x\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} e^{2\pi i(\frac{x}{2^n})y} |y\rangle$$

1. Comece por verificar, detalhando todas as leis que utilizar, que

$$\begin{array}{cc} & \langle v|U^\dagger U|u\rangle \\ = & \{\cdots\} \\ & \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{y=0}^{2^n-1} e^{2\pi i(\frac{(u-v)}{2^n})y} \end{array}$$

2. Calcule o valor desta última expressão para dois casos distintos: um em que $u = v$ e outro em que estes valores são distintos. Nesse cálculo poderá ser útil recorrer à igualdade seguinte, relativa à soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica: $\sum_{i=0}^{n-1} ar^i = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$.