



### Sumário

*Este texto visa suportar o estudo de lógicas apropriadas para exprimir e verificar propriedades dos sistemas reactivos. Começaremos por introduzir uma lógica que permite quantificar as proposições relativamente às transições entre estados, desencadeadas pela ocorrência de interações. Trata-se essencialmente da lógica de Hennessy-Milner que historicamente acompanhou o desenvolvimento de CCS.*

*Na modelação de sistemas reactivos, no entanto, é necessário discutir propriedades que referenciam não apenas transições elementares, mas também os cursos do seu comportamento global. Este tipo de propriedades, ditas temporais, serão formalizadas como limites, num sentido técnico preciso, das propriedades sobre transições elementares, conduzindo-nos a uma lógica extremamente poderosa — o  $\mu$ -calculus modal.*

*O foco do texto, no entanto, será colocada, na identificação e expressão de classes de propriedades relevantes. Em particular, discutiremos uma taxonomia de propriedades temporais a partir da divisão clássica entre requisitos de segurança e animação.*

## 1 Processos e Propriedades

### Motivação

As diversas equivalências observacionais para CCS e  $\pi$ -calculus, permitem relacionar modelos de sistemas reactivos expressos nessas linguagens a diferentes níveis de abstracção. De facto, uma das características das álgebras de processos é a possibilidade de nelas se descreverem tanto especificações muito abstractas como implementações razoavelmente concretas de sistemas reais. No entanto, ao recorrer a uma relação de equivalência para discutir a correcção entre dois níveis de descrição, estamos, de certa forma a *sobre-especificar* o problema na medida em que necessitamos de dispôr, em cada um desses dois níveis, de uma visão do comportamento global do sistema.

No projecto de sistemas reactivos e concorrentes é, por vezes, muito importante poder fazer *menos* que isso, *i.e.*, registar apenas certas propriedades sobre o seu comportamento cuja satisfação deve ser garantida pelos processos que os implementam. Um conjunto de propriedades constitui uma especificação (eventualmente parcial) de um comportamento que, não se preocupando com todos os detalhes da sua descrição, regista os requisitos críticos que o cliente espera ver satisfeitos. Por exemplo, no projecto de um protocolo de comunicações o contrato entre o implementador e o cliente deve especificar que toda a mensagem transmitida é recebida, sem, contudo, descrever os mecanismos que garantem a sua verificação.

Suponhamos que pretendemos especificar a propriedade seguinte sobre um processo que modele uma viatura numa rede de táxis:

$\phi_0 = A$  viatura pode recolher um passageiro ou ser alocada pela Central a um serviço pendente.

Intuitivamente esta propriedade só será válida para uma viatura em serviço, *i.e.*, que previamente saiu da Central para as ruas. De facto, a noção de validade que nos interessa não é universal, mas *relativa* a um determinado estado da vida do processo que modela a viatura. A lógica que procuramos deverá, pois, ser capaz de exprimir esta *relatividade da verdade* em função dos estados alcançados pelo evoluir dos processos.

O universo que nos interessa é obviamente o conjunto  $\mathbb{P}$  dos processos. Notemos, porém, que  $\mathbb{P}$  é mais que um simples conjunto. De facto, está equipado com uma família de relações de transição que especificam de que forma um processo se transforma noutro pela ocorrência de uma determinada acção em *Act*. Os elementos de  $\mathbb{P}$  constituem, como vimos atrás, os estados de um sistema de transição etiquetado por *Act*. Então certas propriedades poderão ser válidas num determinado estado e deixarem de o ser após a realização de uma transição. Por exemplo, a propriedade  $\phi_1 = O \text{ processo pode realizar uma transição por } a$  é verificada pelo processo  $E \triangleq a. \mathbf{0} + b.c.\mathbf{0}$  mas já não pelo processo  $\mathbf{0}$  que resulta da ocorrência de  $a$ . Este, por sua vez, verifica a propriedade  $\phi_2 = O \text{ processo está inactivo, i.e., nenhuma acção pode ser realizada}$ .

Como poderemos exprimir a propriedade  $\phi_3 = O \text{ processo pode evoluir pela ocorrência de uma acção } a \text{ para um processo inactivo}$ ? Para isso necessitamos de introduzir na lógica um conectivo que estabeleça a validade de uma propriedade, não no estado representado pelo processo  $E$ , mas num estado alcançado por uma possível transição, etiquetada por  $a$ , a partir de  $E$ . Vamos representar esse conectivo por  $\langle a \rangle$ . A propriedade  $\phi_3$  escrever-se-á, então, como

$$\langle a \rangle \phi_2$$

Consideremos, agora, uma propriedade ligeiramente diferente:  $\phi_4 = O \text{ processo evolui por toda a ocorrência de uma acção } a \text{ para um processo inactivo}$ . I.é, qualquer transição etiquetada por  $a$  impede o processo de prosseguir a sua actividade. Reparemos que  $E$  acima verifica  $\phi_4$ , mas já  $E' \triangleq a. \mathbf{0} + a.c.\mathbf{0}$  o não faz, uma vez que existe uma transição por  $a$  que conduz a  $c.\mathbf{0}$  que, por sua vez, pode ainda realizar  $c$ . Há, em  $\phi_4$ , uma quantificação universal sobre as transições por  $a$ : enquanto  $\phi_3$  se pode ler como *é possível uma transição por } a \text{ que conduz a um estado que verifique } \phi\_2,  $\phi_4$  dever-se-á ler como *é necessário que uma transição por } a \text{ conduza a um estado que verifique } \phi\_2. Ou, dito de outro modo, *toda* a transição por  $a$  conduz a um estado que verifica  $\phi_2$ . Vamos exprimir isto recorrendo a um novo conectivo, dito de *necessidade*, e representado por  $[a]$ . A propriedade  $\phi_4$  escrever-se-á, então, como**

$$[a] \phi_2$$

Note-se que  $[a]$  e  $\langle a \rangle$  são conectivos *duais*, no sentido em que o são os quantificadores universal e existencial na lógica de primeira ordem<sup>1</sup>. Atente-se, ainda, que nem todos os processos que verificam  $[a] \phi_2$  verificam igualmente  $\langle a \rangle \phi_2$ . É, por exemplo, o caso do processo  $F \triangleq d. \mathbf{0} + b.c.\mathbf{0}$  que falha  $\langle a \rangle \phi_2$  por não exhibir nenhuma transição por  $a$  conducente a  $\mathbf{0}$ , mas verifica  $[a] \phi_2$  (exactamente pela mesma razão pela qual todos os habitantes da Lua são licenciados em Matemática).

Não há razão para nos restringirmos a acções individuais na parametrização deste dois novos conectivos. De facto, podemos parametriza-los por qualquer subconjunto não vazio de *Act*. Por exemplo a propriedade  $\phi_5 = O \text{ processo evolui por toda a ocorrência de } a \text{ ou } b \text{ para um processo inactivo}$  será expressa pela fórmula  $[\{a, b\}] \phi_2$ , que, por convenção, abreviamos para  $[a, b] \phi_2$ .

Pensemos, agora, de que forma podemos exprimir  $\phi_2$ . Dizer que um processo é inactivo, significa que todas as transições a partir dele conduzem a estados “impossíveis”, *i.e.*, que não são representados por nenhum termo em  $\mathbb{P}$ . Existe, de facto, uma fórmula que não é verificada por nenhum processo: a fórmula que representa a falsidade (absoluta) e que é constituída pela constante false. Assim, um processo inactivo é aquele em que toda a transição conduz a um processo que verifica false, *i.e.*, na notação que estamos a introduzir,  $[Act] \text{false}$ . Logo, um processo que verifique  $[Act] \text{false}$  não poderá realizar qualquer transição.

<sup>1</sup>Recorde que, para um predicado  $p(x)$ ,  $\forall_x p(x)$  sse  $\neg \exists x \neg p(x)$ .

Dualmente, todo o processo verifica  $\text{true}$ , a fórmula composta pela constante que representa a verdade (absoluta). Logo um processo que pode realizar pelo menos uma transição (etiquetada por qualquer acção em  $\text{Act}$ ) satisfaz a fórmula  $\langle \text{Act} \rangle \text{true}$ . De facto, o conjunto dos processos que verificam  $\langle \text{Act} \rangle \text{true}$  coincide com  $\mathbb{P} - \{E \mid E \sim \mathbf{0}\}$ , como esperaríamos. Mais uma vez, por convenção, é usual abreviar  $\langle \text{Act} \rangle$  e  $[\text{Act}]$  por  $\langle - \rangle$  e  $[-]$ , respectivamente, onde  $-$  representa a diferença de conjuntos. Em geral, para qualquer  $K \subseteq \text{Act}$ , a expressão  $-K$  como argumento de qualquer dos conectivos anteriores, abrevia  $\text{Act} - K$  (logo,  $-$  é abreviatura de  $\text{Act} - \emptyset = \text{Act}$ ).

## Conectivos Modais

Os conectivos de possibilidade e necessidade acima introduzidos permitem-nos qualificar propriedades cuja validade se afirma em estados da vida do processo alcançados pela realização de transições. Por isso mesmo são ditos *modais*, já que quando aplicados a uma fórmula  $\phi$ , estabelecem o *modo* em que esta é verdadeira.

Suponhamos que introduzimos estes conectivos numa linguagem proposicional com os operadores booleanos usuais. A lógica obtida é dita *modal*. Um modelo para esta lógica é construído sobre o conjunto  $\mathbb{P}$  dos processos (*i.e.*, dos termos na álgebra de processos que temos vindo a considerar) equipado com a família de relações de transição  $\{\overset{x}{\rightarrow} \mid x \in \text{Act}\}$  definida pela semântica operacional da linguagem dos processos. A característica fundamental da lógica reside na *relatividade* da noção de verdade.

Recordemos que a noção de modelo em lógica proposicional clássica é baseada numa atribuição de valores lógicos às variáveis, *i.e.*, numa função  $V : \text{Var} \rightarrow \mathbb{B}$ , onde  $\text{Var}$  é um conjunto de variáveis proposicionais. Isto significa que uma proposição é verdadeira ou falsa em termos absolutos: há um único referencial, determinado quando se fixa a atribuição  $V$ , no qual a validade de uma fórmula se define indutivamente sobre a sua estrutura (por exemplo, uma conjunção será verdadeira sse as suas parcelas o forem).

Aqui, e pelo contrário, a atribuição de valores às variáveis torna-se relativa aos estados da computação, exprimindo-se por uma função  $V : \text{Var} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}$  ou, equivalentemente,  $V : \text{Var} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P})$ , *i.e.*, a cada variável associa-se o conjunto de estados (processos) em que o seu valor é fixado como  $\text{true}$ .

Na próxima secção vamos definir rigorosamente esta lógica baseada nas duas modalidades referidas. Somos, porém, já agora capazes de traduzir numa fórmula a propriedade com que iniciamos esta digressão. Assim,  $\phi_0$  escrever-se-á como

$$\langle \text{rec}, \text{alo} \rangle \text{true}$$

se  $\text{rec}$  e  $\text{alo}$  representarem as acções de recolha de um passageiro e de alocação a um serviço, respectivamente. Mas mais interessante será dizer que  $\phi_0$  se verifica após a saída da viatura para o trabalho diário, dito de outro modo,

$$[\text{sai}] \langle \text{rec}, \text{alo} \rangle \text{true}$$

---

### Nota 1 [Lógicas Modais]

As lógicas *modais* são particularmente adequadas para captar propriedades de sistemas em movimento, na medida em que nos permitem exprimir e discutir as relações entre o *mundo* actual, *i.e.*, aquele em que se coloca o observador, e outros *mundos* possíveis, em relação com ele. Não surpreende, pois, a sua popularidade nas Ciências da Computação, ciências que estudam sistemas essencialmente dinâmicos.

Temos em mãos o exemplo dos processos. Aqui partimos de um conjunto de termos de uma álgebra (*e.g.*  $\mathbf{0}$  ou  $a.b.\mathbf{0}$  ou  $a.d.f.\mathbf{0}$ ), representando estados, que, por sua vez se relacionam pela ocorrência de transições etiquetadas por elementos

de *Act*. Outro exemplo é fornecido pelos sistemas de transição gerados pelos programas sequenciais, onde os estados são associações de endereços da memória a valores e as transições etiquetadas por programas. As lógicas modais adequadas a este caso designam-se por *lógicas de programas* ou *dinâmicas*, entre as quais se contam a lógica de Floyd-Hoare [Hoa69] e o cálculo de *weakest preconditions* [Dij76] que foram possivelmente abordadas no estudo da programação imperativa. Note-se, de passagem, que no primeiro caso a riqueza estrutural está localizada no conjunto de estados (*cf.* a estrutura induzida pela álgebra de processos), enquanto, no segundo, reside nas etiquetas (onde se define uma álgebra de programas cujos termos são, por exemplo, ' $p_1; p_2$ ', 'if  $b$  then  $p_1$  else  $p_2$ ' ou 'while  $b$  do  $p_1$ '). Em ambos, a noção computacional de *estado* é introduzida na lógica, num sentido matematicamente preciso, como patamar de interpretação das fórmulas.

A origem das lógicas modais é, porém, muito anterior e o seu campo de aplicabilidade muito mais vasto. Classicamente estas lógicas diferenciam afirmações que são necessariamente verdadeiras de outras que apenas o podem ser. Proposições sempre verdadeiras ou falsas são ditas, respectivamente, *necessárias* e *impossíveis*. Por seu lado, uma proposição *contingente* não será nem necessária nem impossível, enquanto se classificam de *possíveis* todas as proposições não impossíveis. O significado exacto desta classificação é definido de diversas formas. O quatro conceitos — *necessidade*, *possibilidade*, *impossibilidade* e *contingência* — são ditos *modais* porque em lógica medieval eram encarados como os *modos* segundo os quais se discutia a veracidade de uma proposição.

Os sistemas de transição referidos pertencem à classe das estruturas — ditas de *Kripke* — classicamente utilizadas para interpretação das lógicas modais. Estas são formadas por um conjunto  $W$  (de *mundos*) sobre o qual se toma uma relação binária, dita de *acessibilidade*. De facto, em Matemática, as lógicas modais são utilizadas como o contexto mais adequado para descrever, classificar e raciocinar sobre *estruturas relacionais* genéricas (ver [BRV95] para uma introdução razoavelmente acessível).

No nosso caso,  $W$  é o conjunto dos termos gerados pela álgebra de processos considerada. Por outro lado, generalizamos a relação de acessibilidade a uma família de relações de transição etiquetadas.

## 2 Uma Lógica Modal para Processos

### A Linguagem Modal

A discussão feita na secção anterior permite-nos introduzir a seguinte linguagem modal — que designaremos por  $\mathbb{L}_M$  — para exprimir propriedades comportamentais dos processos. Trata-se de uma pequena variante da *lógica de Hennessy-Milner* introduzida em [HM85] e que constitui um ingrediente clássico da teoria dos processos (o capítulo 10 de [Mil89] é-lhe dedicado). A diferença, relativamente à versão original, consiste no facto de aqui os conectivos modais serem parametrizados por conjuntos de acções, e não por acções singulares. Assim, consideremos,

$$\phi ::= \text{true} \mid \text{false} \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \phi_1 \vee \phi_2 \mid \langle K \rangle \phi \mid [K] \phi$$

onde  $K \subseteq \text{Act}$ .

A relação fundamental entre um processo  $E$  e uma fórmula  $\phi$  é a *relação de satisfação*, que se representa por  $E \models \phi$ . Esta é definida indutivamente sobre a estrutura das fórmulas. Assim,

$$\begin{array}{ll} E \models \text{true} & \\ E \not\models \text{false} & \\ E \models \phi_1 \wedge \phi_2 & \text{sse } E \models \phi_1 \wedge E \models \phi_2 \\ E \models \phi_1 \vee \phi_2 & \text{sse } E \models \phi_1 \vee E \models \phi_2 \\ E \models \langle K \rangle \phi & \text{sse } \exists_{F \in \{E' \mid E \xrightarrow{a} E' \text{ e } a \in K\}} \cdot F \models \phi \\ E \models [K] \phi & \text{sse } \forall_{F \in \{E' \mid E \xrightarrow{a} E' \text{ e } a \in K\}} \cdot F \models \phi \end{array}$$

As propriedades dos processos que podemos exprimir através desta lógica são essencialmente propriedades relacionadas com a necessidade ou possibilidade imediatas de se realizarem de-

terminadas acções. Vejamos alguns exemplos. Consideremos de novo a especificação de um controlador de exclusão mútua:

$$\begin{aligned} Sem &\triangleq get.put.Sem \\ P_i &\triangleq \overline{get}.c_i.\overline{put}.P_i \\ S &\triangleq \text{new } \{get, put\} (Sem \mid (\!|_{i \in I} P_i)) \end{aligned}$$

Podemos facilmente verificar os factos seguintes:

- $Sem \models \langle get \rangle \text{true}$  que estabelece a possibilidade do processo  $Sem$  realizar  $get$ . De facto,

$$\exists_{F \in \{Sem' \mid Sem \xrightarrow{get} Sem'\}} \cdot F \models \text{true}$$

basta tomar  $F = put.Sem$ .

- Contudo,  $Sem \models [put] \text{false}$ , i.e.,  $Sem$  não pode realizar a acção  $put$ . De facto, o conjunto de transições  $T = \{Sem' \mid Sem \xrightarrow{put} Sem'\}$  é vazio pelo que a expressão  $\forall_{F \in T} \cdot F \models \text{false}$  se torna vacuosamente verdadeira.
- A única acção inicialmente permitida ao processo  $S$  é a acção não observável  $\tau$  que resulta da sincronização de um  $get$  do semáforo com  $\overline{get}$  realizado por um dos processos por ele controlados. Podemos exprimir isto pela fórmula  $S \models [Act - \{\tau\}] \text{false}$ , ou, abreviadamente,  $\models [-\tau] \text{false}$ .
- Após a ocorrência de  $\tau$ , contudo,  $S$  pode realizar qualquer dos eventos críticos  $c_1, c_2, \dots, c_i$ , i.e.,  $[-\tau] \langle c_1, c_2, \dots, c_i \rangle \text{true}$ .
- De forma análoga podemos concluir que após uma sincronização inicial com o semáforo (pela ocorrência conjunta de  $get$  em  $Sem$  e  $\overline{get}$  no sub-processo  $P_j$ ) e a realização do evento crítico  $c_j$  por  $P_j$ , a ocorrência de uma nova sincronização com o semáforo (agora via  $put$  e  $\overline{put}$ ) é inevitável. Temos, portanto,  $S \models [\tau][c_j] (\langle - \rangle \text{true} \wedge [-\tau] \text{false})$ .

Como vimos no último exemplo a *inevitabilidade* da ocorrência de uma acção  $a$  é expressa pela fórmula  $\langle - \rangle \text{true} \wedge [-a] \text{false}$ . A primeira parcela da conjunção indica que existe pelo menos uma transição possível, enquanto a segunda estabelece que todas as transições, excepto as etiquetadas por  $a$ , conduzem a um estado que verifica  $\text{false}$ . Como tal estado não existe, podemos concluir que, num processo que satisfaça a fórmula, apenas existem transições por  $a$  (e existem mesmo porque se força  $\langle - \rangle \text{true}$ ).

Vimos já que  $\langle - \rangle \text{true}$  exprime possibilidade de evolução (há pelo menos uma transição disponível) e que  $[-] \text{false}$  traduz terminação ou *deadlock*. Claramente,  $\mathbf{0} \models [-] \text{false}$ . Curiosamente, as fórmulas duais —  $\langle - \rangle \text{false}$  e  $[-] \text{true}$  — são desinteressantes. A primeira é verificada por um processo  $E$  tal que

$$\exists_{F \in \{E' \mid E \xrightarrow{x} E' \wedge x \in Act\}} \cdot F \models \text{false}$$

Como nenhuma transição pode conduzir a um estado que não existe,  $\langle - \rangle \text{false}$  é equivalente à constante  $\text{false}$ . Dualmente, a segunda fórmula equivale a  $\text{true}$ . Por seu lado, a possibilidade de realização de uma sequência  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  de acções é captada na fórmula  $\langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle \langle a_3 \rangle \dots \langle a_n \rangle \text{true}$ . Notemos, por fim, que a verificação de que um processo satisfaz uma determinada propriedade modal se faz muito simplesmente por aplicação da definição de  $\models$ . Em particular, não é necessário calcular o grafo de transições do processo.

## Equivalência Modal e Bissimulação

A relação de satisfação em  $\mathbb{L}_M$  permite-nos definir uma nova equivalência entre processos — a que resulta da satisfação do mesmo conjunto de fórmulas. De facto, para qualquer conjunto  $\Gamma$ , finito ou infinito, de fórmulas podemos definir a seguinte equivalência em  $\mathbb{P}$ :

$$E \equiv_{\Gamma} F \quad \text{sse} \quad \forall \phi \in \Gamma . E \models \phi \quad \text{sse} \quad F \models \phi$$

Se, por exemplo,  $\Gamma$  for o conjunto de todas as fórmulas do tipo  $\langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \dots \langle x_n \rangle \text{true}$ , a equivalência  $\equiv_{\Gamma}$  relacionará os processos capazes de realizarem as mesmas sequências de acções. Neste caso os processos  $a.b. \mathbf{0} + a.c.\mathbf{0}$  e  $a.(b.\mathbf{0} + c.\mathbf{0})$ , que, como bem sabemos, não são bissimilares, são identificados por esta equivalência. Já se  $\Gamma$  se restringisse às fórmulas do tipo  $\langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \langle x_3 \rangle \dots \langle x_n \rangle [-] \text{false}$ , estaríamos a considerar equivalentes os processos que realizam as mesmas sequências *completas* de acções, *i.e.*, aquelas que conduzem à “morte” (terminação) do seu comportamento. Os processos poderiam divergir nas restantes sequências de acções.

Dizemos, em particular, que os processos  $E$  e  $F$  são *modalmente equivalentes*, e escrevemos  $E \equiv F$  quando  $E \equiv_{\Gamma} F$  e  $\Gamma$  é o conjunto de *todas* as fórmulas bem formadas da lógica.

Uma questão muito importante é saber de que forma a equivalência modal se relaciona com a bissimulação (estrita) sobre a qual construímos o nosso cálculo de processos. O resultado fundamental é o seguinte

**Lema 1** *Dados dois processos  $E$  e  $F$ , se  $E \sim F$  então  $E \equiv F$ .*

*Prova.* A prova procede por indução sobre a estrutura das fórmulas. Assim, suponhamos que  $E \sim F$  e tentemos mostrar que  $E \models \phi$  sse  $F \models \phi$  para toda a fórmula  $\phi$ . Os casos de base —  $\phi = \text{true}$  ou  $\phi = \text{false}$  — são triviais. Quando  $\phi$  é uma conjunção ou uma disjunção, o resultado decorre imediatamente da hipótese de indução. Vejamos, pois, os casos em que o conectivo principal de  $\phi$  é uma modalidade, que são os verdadeiramente interessantes.

Seja, então,  $\phi = \langle K \rangle \psi$ , com  $K \subseteq \text{Act}$ . Se  $E \models \phi$  é porque existe um  $E' \in \mathbb{P}$  tal que  $E \xrightarrow{a} E'$ , para algum  $a \in K$ , e  $E' \models \psi$ . Como  $E \sim F$ , sabemos que existe uma transição  $F \xrightarrow{a} F'$  para um  $F' \in \mathbb{P}$  tal que  $E' \sim F'$ . Como, por hipótese de indução  $E' \equiv F'$ , temos que  $F' \models \psi$ . Então, de novo pela definição do conectivo  $\langle K \rangle$ , concluímos que  $F \models \langle K \rangle \psi$ . O argumento é similar para o caso  $\phi = [K] \psi$ . □

O converso deste lema não é verdadeiro no caso geral. Por exemplo, considerem-se os processos  $A \triangleq \sum_{i \geq 0} A_i$ , onde  $A_0 \triangleq \mathbf{0}$  e  $A_{i+1} \triangleq a.A_i$ , e  $A' \triangleq A + \underline{\text{fix}}(X = a.X)$ . Claramente,  $A$  e  $A'$  verificam as mesmas propriedades modais. No entanto  $A \not\sim A'$  porque, caso contrário, a transição  $A' \xrightarrow{a} \underline{\text{fix}}(X = a.X)$  deveria ser correspondida por uma transição de  $A$  por  $a$  para um processo bissimilar a  $\underline{\text{fix}}(X = a.X)$ . Ora  $A$  apenas pode transitar para um  $A_j$ , para algum  $j \geq 0$ , e, obviamente,  $A_j \not\sim \underline{\text{fix}}(X = a.X)$ .

O resultado é contudo válido para uma classe restrita, embora na prática suficientemente ampla, de processos — os processos com *imagem finita*. Para precisar esta condição, defina-se, para um processo  $E$  e uma acção  $x \in \text{Act}$ , o conjunto  $\{E' \mid E \xrightarrow{x} E'\}$  dito dos sucessores de  $E$  por  $x$ . Sempre que os elementos do conjunto  $\{F \mid \exists \omega \in \text{Act}^* . E \xrightarrow{\omega} F\}$  têm conjuntos finitos de sucessores para todo o  $x \in \text{Act}$ ,  $E$  é dito um processo com *imagem finita*. Não é difícil verificar que os processos discutidos no último exemplo não estão nestas condições. Assim,

**Lema 2** *Dados dois processos  $E$  e  $F$  com imagem finita, se  $E \equiv F$  então  $E \sim F$ .*

*Prova.* Notemos que a condição *imagem finita* significa que todos os estados alcançáveis a partir do processo em causa têm um número finito de sucessores. Suponhamos, então, que  $E \equiv F$  e procuremos encontrar

uma bissimulação que os contenha. A candidata óbvia é a própria equivalência modal  $\equiv$ . Verifiquemos, pois, se esta é capaz de satisfazer as duas cláusulas definidoras de uma bissimulação. Como bem sabemos essas cláusulas impõem condições simétricas, pelo que o argumento a utilizar na verificação de uma delas é também (simetricamente) válido para a segunda (o que é ótimo porque reduz a prova a metade!).

Assim, suponhamos que  $E \xrightarrow{a} E'$ , para algum  $a \in Act$ , e que  $E \equiv F$ . Tentemos contrariar o resultado formulando a hipótese de que não existe nenhum  $F' \in \mathbb{P}$  tal que  $F \xrightarrow{a} F'$  e  $E' \equiv F'$ .

Seja  $S = \{G \mid F \xrightarrow{a} G\}$ . O conjunto  $S$  é necessariamente não vazio, porque, se fosse vazio, teríamos  $F \models [a]false$  ao passo que  $E \models \langle a \rangle true$  uma vez que estamos a supôr a existência de uma transição de  $E$  por  $a$ . Nesse caso não seria válida a equivalência  $E \equiv F$ , que constitui a hipótese do lema. Notemos, porém, que  $S$  é um conjunto *finito*  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ , dado que  $F$  tem imagem finita.

Se, de facto, se não tem  $E' \equiv F'$ , temos que, para cada  $G_i \in S$ , existe uma fórmula  $\phi_i$  tal que  $E' \models \phi_i$  mas  $G_i \not\models \phi_i$ . Segue-se, pois, que  $E \models \langle a \rangle (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n)$ , o mesmo não sendo válido para  $F$ . Mas então,  $E$  não é modalmente equivalente a  $F$ , o que contradiz a hipótese. O resultado segue, pois, por contra-recíproco. Notemos, contudo, que o argumento utilizado até aqui só prova o lema porque permanece válido quando, em vez de  $E$  e  $F$ , começamos por considerar dois quaisquer processos no espaço dos processos alcançáveis a partir de  $E$  e de  $F$ , respectivamente. Da condição do lema decorre que qualquer desses processos tem um conjunto finito de sucessores para todo o  $a \in Act$ . □

Reparemos em que ponto desta última prova foi usada a condição de imagem finita. Notemos que se  $F$  tivesse um número não finito de sucessores iríamos necessitar de uma conjunção infinita na definição de  $\psi$ . A lógica que introduzimos é finitária pelo que tal conjunção não faz sentido. Se eliminarmos essa restrição da lógica, o que diminui a sua operacionalidade, podemos igualmente eliminar a condição de imagem finita sobre os processos chegando a um resultado mais geral, mas (computacionalmente) menos relevante.

### 3 Lógica Modal e Transições Observáveis

Os conectivos modais que introduzimos exploram a estrutura das transições em  $\mathbb{P}$  do tipo  $\xrightarrow{x}$ , para  $x \in Act$ , relativizando a validade das fórmulas a conjuntos de estados alcançados através de determinadas transições. Sobre  $\mathbb{P}$ , porém, é possível definir outras famílias de relações que são computacionalmente relevantes. Uma delas é a das relações de *transição observável*,  $\xrightarrow{a} \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ , em que as etiquetas são elementos de  $L \cup \{\epsilon\}$ . Recorde-se que uma  $\xrightarrow{\epsilon}$ -transição corresponde a zero ou mais transições elementares não observáveis (*i.e.*, etiquetadas por  $\tau$ ).

Vamos, pois, começar por introduzir em  $\mathbb{L}_M$  dois novos conectivos modais que exprimem, respectivamente, a possibilidade e a necessidade de uma propriedade ser válida após a realização de uma quantidade arbitrária de comportamento não observável. Para definir estes operadores consideremos mais dois casos na definição da relação de satisfação  $\models$ .

$$\begin{aligned} E \models \langle \rangle \phi & \quad \text{sse} \quad \exists_{F \in \{E' \mid E \xrightarrow{\epsilon} E'\}} \cdot F \models \phi \\ E \models [ ] \phi & \quad \text{sse} \quad \forall_{F \in \{E' \mid E \xrightarrow{\epsilon} E'\}} \cdot F \models \phi \end{aligned}$$

Por abreviatura podemos agora definir as “versões observáveis” de  $\langle K \rangle$  e  $[K]$ , para  $K \subseteq L$ . Assim,

$$\begin{aligned} \langle \langle K \rangle \rangle \phi & \stackrel{\text{abv}}{=} \langle \rangle \langle K \rangle \langle \rangle \phi \\ [ [K] ] \phi & \stackrel{\text{abv}}{=} [ ] [K] [ ] \phi \end{aligned}$$

Vejamos alguns exemplos de propriedades exprimíveis à custa deste conectivos.

- $\langle\langle a \rangle\rangle \text{true}$  representa a capacidade de realização observável da acção  $a$ . Por exemplo, o processo  $S$  discutido anterior (que simulava uma situação de exclusão mútua) satisfaz a fórmula  $\langle\langle c_j \rangle\rangle \text{true}$ , indicando que o processo  $P_j$  pode realizar a acção crítica respectiva.
- Similarmente a fórmula  $\langle\langle a_1 \rangle\rangle \langle\langle a_2 \rangle\rangle \langle\langle a_3 \rangle\rangle \dots \langle\langle a_n \rangle\rangle \text{true}$  exprime a possibilidade de realização da sequência observável de acções  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .
- Por seu lado  $\llbracket - \rrbracket \text{false}$  traduz a impossibilidade de realização de comportamento observável. A propriedade é satisfeita, não apenas por  $\mathbf{0}$  (que de resto verifica também  $\llbracket - \rrbracket \text{false}$ ), mas igualmente por processos como  $D \triangleq \tau.D + \mathbf{0}$  ou  $\text{new } \{a\} A \mid B$  onde  $A \triangleq a.A$  e  $B \triangleq \bar{a}B$ , que se envolvem numa cadeia interminável de acções invisíveis.

Um caso interessante é o da propriedade que estabelece a inevitabilidade da ocorrência de  $a$ , mas agora de um ponto de vista observacional. A inevitabilidade foi já expressa como  $\langle - \rangle \text{true} \wedge \llbracket -a \rrbracket \text{false}$ . Reparemos, contudo, que a versão observacional desta fórmula  $\langle - \rangle \text{true} \wedge \llbracket -a \rrbracket \text{false}$  — é demasiado fraca. A fórmula é, por exemplo, satisfeita pelo processo  $P \triangleq a.P + \tau.\mathbf{0}$ , apesar de haver a possibilidade em  $P$  de  $a$  acabar por nunca ocorrer. Podemos fortalecê-la forçando a possibilidade de transições observáveis ocorrerem após a realização de comportamento invisível, *i.e.*,  $\llbracket \langle - \rangle \text{true} \wedge \llbracket -a \rrbracket \text{false} \rrbracket$ . Esta fórmula já não é satisfeita por  $P$ , uma vez que  $P \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{0}$  e  $\mathbf{0} \not\models \llbracket \langle - \rangle \text{true} \rrbracket$ . O problema permanece, porém, com o processo  $P \triangleq a.P + \tau.P$ , que, podendo igualmente nunca realizar  $a$ , satisfaz  $\llbracket \langle - \rangle \text{true} \rrbracket$ .

O problema reside na quantidade de movimento não observável admissível na definição dos novos conectivos modais. Se desejarmos exprimir que uma acção ocorre no termo da actividade interna do processo devemos limitar finitamente essa actividade. Dito de outro modo, temos de garantir que o processo é *convergente*, *i.e.*, incapaz de se comprometer num ciclo perpétuo de actividade interna não observável. Para isso vamos considerar um novo conectivo modal similar a  $\llbracket \langle - \rangle \text{true} \rrbracket$ , mas com informação adicional sobre convergência.

$$E \models \llbracket \downarrow \rrbracket \phi \quad \text{sse} \quad E \downarrow \wedge \forall_{F \in \{E' \mid E \xrightarrow{\epsilon} E'\}} \cdot F \models \phi$$

onde  $E \downarrow$  significa que o processo  $E$  é convergente.

Podemos, agora, definir uma fórmula para a inevitabilidade que exclua a possibilidade de divergência:

$$\llbracket \downarrow \rrbracket \langle - \rangle \text{true} \wedge \llbracket -a \rrbracket \text{false}$$

Diversas combinações destes conectivos revelam-se úteis na especificação de processos. Por exemplo, podemos definir por abreviatura operadores que forcem a convergência do comportamento interno até determinadas transições ocorrerem ou uma dada fórmula ser satisfeita. É o caso de  $\llbracket \downarrow K \rrbracket \stackrel{\text{abv}}{\equiv} \llbracket \downarrow \rrbracket \llbracket K \rrbracket \llbracket \downarrow \rrbracket$ ,  $\llbracket K \downarrow \rrbracket \stackrel{\text{abv}}{\equiv} \llbracket \rrbracket \llbracket K \rrbracket \llbracket \downarrow \rrbracket$  ou mesmo  $\llbracket \downarrow K \downarrow \rrbracket \stackrel{\text{abv}}{\equiv} \llbracket \downarrow \rrbracket \llbracket K \rrbracket \llbracket \downarrow \rrbracket$ . A semântica destes conectivos derivados é a que se esperaria. Por exemplo,

$$E \models \llbracket \downarrow K \rrbracket \phi \quad \text{sse} \quad E \downarrow \wedge \forall_{F \in \{E' \mid E \xrightarrow{a} E' \wedge a \in K\}} \cdot F \models \phi$$

Como exercício, dever-se-á verificar que, apesar de  $\llbracket - \rrbracket \text{true}$  ser equivalente a  $\text{true}$ , e, por isso válida em qualquer processo, apenas os processo convergentes satisfazem  $\llbracket \downarrow - \rrbracket \text{true}$ . Assim, a fórmula  $\llbracket \downarrow a_1 \downarrow \rrbracket \llbracket \downarrow a_2 \downarrow \rrbracket \dots \llbracket \downarrow a_n \downarrow \rrbracket \text{true}$  exprime a realização convergente de uma sequência  $a_1 a_2 \dots a_n$  de acções observáveis.



## 4 Propriedades Temporais e Computações

### Transições vs Computações

Ao longo deste curso temos sublinhado a ideia de que os *sistemas de transição* constituem uma ferramenta adequada para a definição da semântica dos processos (e, mais genericamente, dos programas e dos sistemas computacionais). Vimos, também, que sobre eles podemos interpretar lógicas — a que chamamos *modais* — que relativizam a validade das proposições aos estados que os processos vão alcançando pela realização de transições. Vimos, por fim, como estas são capazes de exprimir propriedades *locais* dos processos, nomeadamente acerca da possibilidade ou da necessidade de ocorrência de determinadas acções, que encaramos como transformadores de estados.

Na especificação de sistemas concorrentes deparamos, no entanto, com a necessidade de formular propriedades, não apenas sobre transições particulares, mas também sobre a evolução global dos processos, *i.e.*, os padrões comportamentais que estes podem ou devem exibir.

Sabemos, por exemplo, representar modalmente o facto de uma viatura, no exemplo da Rede de Táxis, poder regressar à Central, *i.e.*,

$$\phi_1 = \langle reg \rangle true$$

A possibilidade deste regresso não é contudo válida em todos os estados do processo que modela a viatura. Em particular, é razoável supôr que não se verifica no estado inicial do processo (no qual a viatura se encontra, precisamente, na garagem da Central). O que, em rigor, gostaríamos de exprimir é o facto de, ao longo da sua vida, a viatura acabar por atingir um (ou mais) estado(s) em que o regresso é uma possibilidade efectiva. Dito de outra forma,  $\phi_1$  verifica-se ou, então, existe pelo menos uma transição que conduz a um estado em que  $\phi_1$  se verifica ou, então, existe pelo menos uma transição que ... O que seríamos tentados a escrever como

$$\phi_2 = \langle reg \rangle true \vee \langle - \rangle \langle reg \rangle true \vee \langle - \rangle \langle - \rangle \langle reg \rangle true \vee \langle - \rangle \langle - \rangle \langle - \rangle \langle reg \rangle true \vee \dots$$

Não podendo, sem comprometer o seu significado, substituir  $\phi_2$  por uma disjunção finita, deparamos com uma fórmula que não é bem formada na lógica que atrás introduzimos. Vamos, pois, tentar formalizar o significado que intuitivamente atribuímos às reticências.

O ponto fundamental reside no facto de estarmos, agora, interessados em propriedades, não das transições individualmente consideradas, mas das *sequências de transições* que os processos realizam. Num processo  $E$  tais sequências constituem *caminhos*, ou cursos de evolução, ao longo do sistema de transição gerado por  $E$ .

Estamos particularmente interessados em *caminhos maximais*, *i.e.*, nas sequências infinitas ou nas finitas que conduzem à terminação do processo, ou seja, a estados a partir dos quais não são possíveis quaisquer transições. No que se segue referir-nos-emos a estes caminhos como as *computações* dos processos. Formalmente, a computação de um processo  $E$  é uma sequência  $\langle E_0, E_1 \dots E_n \rangle$  de estados (representados por expressões no cálculo de processos) tal que

1.  $E_0 = E$
2.  $n = \infty$  ou a partir do termo  $E_n$  não existem mais derivações por elementos de  $Act$
3.  $\forall_{0 \leq i < n} \exists_{a \in Act}. E_i \xrightarrow{a} E_{i+1}$

Um outro exemplo da necessidade de raciocinar sobre as computações, e não apenas sobre as

transições individuais, é fornecido pelos processos  $A$  e  $A'$  discutidos atrás. Aí definimos

$$A \triangleq \sum_{i \geq 0} A_i \quad \text{com } A_0 \triangleq \mathbf{0} \text{ e } A_{i+1} \triangleq a.A_i$$

$$A' \triangleq A + D \quad \text{com } D \triangleq a.D$$

e argumentamos que, apesar de  $A \approx A'$ , não havia nenhuma propriedade modal que os distinguísse. De facto, cada  $A_i$  falha a propriedade  $\langle a \rangle^{i+1} \text{true}$ , que  $A'$  verifica. Mas teríamos, de novo, que recorrer a uma disjunção infinita para construir uma fórmula que qualquer  $A_i$  falhasse. O que, em verdade, distingue um processo do outro é a capacidade de  $A'$  realizar a acção  $a$  indefinidamente e essa é uma capacidade a “longo prazo”, uma capacidade *temporal*.

### Propriedades Temporais

Vamos designar por *propriedades temporais* aquelas que apenas faz sentido exprimir sobre as computações dos processos. Mas que propriedades são essas? Classicamente, distinguem-se dois tipos básicos:

- As propriedades de *segurança*, que se relacionam com a invariância de uma determinada característica comportamental (por exemplo, a ausência de *deadlock*). Intuitivamente podemos dizer que uma propriedade deste tipo estabelece que “as coisas indesejáveis não acontecem”. No já muito batido exemplo do controlador de exclusão mútua, uma propriedade de segurança seria  $\psi_1 = A \text{ exclusão mútua não é violada}$ . No domínio da programação sequencial o típico requisito de segurança é a exigência de que o programa produza resultados correctos e é conhecido como a *correção parcial* do programa.
- As propriedades de *animação* que estabelecem a necessidade ou a possibilidade de “coisas desejáveis acabarem por se verificar”. Voltando ao exemplo anterior notemos que o requisito de segurança  $\psi_1$  pode ser satisfeito por um controlador que permanentemente autorize apenas um dos processos a entrar na sua região crítica, ficando o outro incapaz de prosseguir. Ou até por um semáforo autista que impeça qualquer processo de aceder à respectiva região crítica. Em qualquer dos casos, mesmo que por omissão, se garante a exclusão mútua. Assim, a especificação do controlador não pode omitir uma propriedade que estabeleça que  $\psi_2 = \text{cada processo é capaz, de eventualmente ter acesso à sua região crítica}$ . Deste modo se garante a ausência de *livelock* —  $\psi_2$  é, pois, uma propriedade de animação. No caso sequencial a propriedade de animação que é forçoso garantir é a *terminação* da execução do programa. A dupla garantia da correção parcial e da terminação é referida como a *correção total* do programa. No caso da programação concorrente, porém, a ontologia da animação é muito mais rica. Temos, por exemplo, propriedades relacionadas com o progresso dos sistemas (e.g. a acção *reg* ocorre eventualmente numa computação do sistema), propriedades recorrentes (e.g. a acção *reg* ocorre um número infinito de vezes na vida do sistema), propriedades de persistência (e.g. a partir de um determinado estado, a acção *reg* está continuamente disponível), ...

A especificação de um sistema concorrente inclui, regra geral, uma componente de animação e uma componente de segurança. Além disso qualquer propriedade sobre o comportamento de um sistema pode ser expressa como uma combinação de uma propriedade de cada um dos dois tipos referidos.

A divisão das propriedades temporais em dois grandes grupos — *segurança* e *animação* — foi originalmente proposta por L. Lamport em [Lam77], onde surge também a sua ilustração em termos da ocorrência de “coisas desejáveis” ou “indesejáveis”. Se interpretarmos essas “coisas” como factos verificáveis (observáveis) em tempo finito, podemos dizer as propriedades temporais se distinguem pela frequência de ocorrências de “coisas desejáveis”: sempre (segurança), pelo menos uma vez (progresso), um número infinito de vezes (recorrência), etc. Desde [Lam77] têm sido propostas diversas formulações rigorosas destas propriedades [AS85, Lam83] e outros esquemas de classificação. Em particular, existem diversas tentativas de organizar hierarquicamente as propriedades de animação (e.g. [MP90]).

Note-se, porém, que para especificar de requisitos de animação se torna necessária uma linguagem capaz de definir propriedades sobre comportamentos *infinitos*, enquanto para a segurança é suficiente lidar com comportamentos *finitos*, ou com prefixos finitos de comportamentos infinitos. As técnicas de prova usadas na verificação destes requisitos são, igualmente, distintas. Assim, para estabelecer uma propriedade de segurança é suficiente mostrar que esta se verifica no estado inicial do processo e que é preservada pelas transições. Consequentemente, um argumento indutivo sobre o comprimento da computação estabelece que a propriedade é sempre válida. A indução aqui é implícita: surge na justificação do método de prova e não na sua aplicação. Na área dos métodos formais de desenvolvimento de programas (por exemplo, em [Jon86]) é comum depararmos com provas deste tipo, por exemplo, na demonstração da preservação do invariante pelas operações de um modelo (ou não fosse este um típico requisito de segurança). Já a prova de propriedades de animação recorre frequentemente a um argumento indutivo explícito sobre uma observação do conjunto de estados que mede a “distância” até à verificação da propriedade desejada.

## 5 Interpretação das Propriedades Temporais

### Como Interpretar as Propriedades Temporais?

Vimos já que o que fundamentalmente distingue as propriedades temporais das propriedades modais anteriormente consideradas é o facto de as primeiras serem formuladas sobre o conjunto das *computações* dos processos. Assim, parece razoável supôr que as mesmas fórmulas modais, se interpretadas sobre sequências de transições elementares, poderiam ser “re-utilizadas” para exprimir propriedades temporais. Por exemplo, poderíamos tomar, como universo de interpretação, um sistema de transição cujos estados continuassem a ser os termos de  $\mathbb{P}$ , mas em que, na definição das transições, se tomasse  $\xrightarrow{\omega} \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ , com  $\omega \in Act^*$  (em vez de  $\xrightarrow{a} \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ , com  $a \in Act$ ). Poderíamos, ainda, ser um pouco mais ambiciosos e restringir esta relação às sequências que efectivamente representam computações válidas (de acordo com a definição acima).

Em qualquer caso, obtemos uma estrutura de interpretação muito mais rica que, por si só, sugere a introdução de novos operadores na lógica: operadores que realizem uma “quantificação” sobre as computações (da mesma forma que  $[-]$  e  $\langle - \rangle$  “quantificam” sobre as transições elementares). As lógicas resultantes são classificadas como *lógicas temporais*.

#### Nota 3

Transições etiquetadas por sequências de acções, ou por determinados tipos destas, introduzem o elemento de *temporalidade* que pretendemos dominar. Podemos, mesmo, *codificar* estas relações em estruturas relacionais que modelam discretamente o tempo como um conjunto de instantes e uma ordem parcial entre eles.

De facto, originalmente, as lógicas temporais definem-se como lógicas modais sobre sistemas de transição não etiquetados onde as relações de transição são simples ordens parciais. Se olharmos para essas ordens como a relação familiar de precedência temporal e o conjunto de estados como um conjunto de instantes, as duas famílias básicas de operadores modais colapsam em dois únicos conectivos (uma vez que omitimos a etiquetagem por acções). Temos, então,  $\langle \rangle$  e  $[\ ]$  que exprimem, respectivamente, *eventualidade* e *invariância*. Diferentes tipos de lógicas temporais são obtidas considerando diferentes maneiras de ordenar o tempo. A usual ordem total leva-nos aos modelos *lineares*. Se, porém, admitirmos não linearidade à esquerda ou à direita obtemos os modelos *ramificados* que permitem considerar distintos cenários futuros ou diferentes histórias passadas, respectivamente. Recorde-se que uma relação de ordem  $\mathcal{R}$  é linear à direita se  $(a\mathcal{R}c \wedge b\mathcal{R}c) \Rightarrow (a = b \vee a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a)$ . Dualmente, diz-se linear à esquerda se  $(c\mathcal{R}a \wedge c\mathcal{R}b) \Rightarrow (a = b \vee a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a)$ . Existem

inúmeras variantes desta aproximação e das suas aplicações às ciências da computação (ver, por exemplo, [Sti92]).

A abordagem que vamos seguir neste curso é, contudo, um pouco distinta. Assim, em vez de interpretarmos as fórmulas modais directamente sobre uma estrutura relacional mais geral, vamos encarar as propriedades temporais como *limites* de propriedades modais sobre transições elementares. Esta visão das propriedades tem uma analogia, que queremos explorar, com a visão das computações de um processo como *limites* das transições elementares. Por exemplo, a possibilidade de um processo realizar numa determinada computação a transição etiquetada por  $a$ , pode ser vista como o limite das possibilidades de, em cada estado dessa computação ser possível a realização de  $a$ .

Porém, para desenvolvermos esta perspectiva, necessitamos de voltar a reflectir sobre as propriedades modais que atrás introduzimos. O que motiva

### Um Segundo Olhar Sobre a Lógica Modal

A cada fórmula modal  $\phi$  podemos associar o conjunto dos processos que a verificam, *i.e.*,  $\{E \in \mathbb{P} \mid E \models \phi\}$ , conjunto que representaremos por  $\|\phi\|$ . Notemos que  $\phi$  e  $\|\phi\|$  são duas maneiras distintas de nos referirmos à *mesma* propriedade, ainda que  $\phi$  o faça de forma mais conveniente uma vez que, regra geral,  $\|\phi\|$  não é um conjunto finito.

Uma qualquer propriedade  $\phi$  divide, pois,  $\mathbb{P}$  em dois subconjuntos disjuntos:  $\|\phi\|$  e o seu complemento (*i.e.*,  $\mathbb{P} - \|\phi\|$ ). Este último corresponderia a  $\|\neg\phi\|$ , se tivessemos introduzido na lógica o conectivo usual de negação ( $\neg$ ). Mesmo não o tendo feito, podemos sempre referirmo-nos ao *complemento* de  $\phi$ , que representaremos por  $\phi^c$ , como a fórmula correspondente à propriedade  $\mathbb{P} - \|\phi\|$ . De facto, esta noção de fórmula complementar está presente na lógica mesmo sem a introdução explícita da negação. Podemos defini-la estruturalmente. Assim,

$$\begin{aligned} \text{true}^c &= \text{false} \\ \text{false}^c &= \text{true} \\ (\phi_1 \wedge \phi_2)^c &= \phi_1^c \vee \phi_2^c \\ (\phi_1 \vee \phi_2)^c &= \phi_1^c \wedge \phi_2^c \\ (\langle a \rangle \phi)^c &= [a] \phi^c \end{aligned}$$

Esta correspondência entre fórmulas modais e conjuntos de processos fornece-nos uma definição alternativa da semântica da lógica que temos vindo a considerar. Para isso, porém, torna-se necessário definir directamente os conjuntos  $\|\phi\|$ , por indução sobre a estrutura das fórmulas, e não em termos da relação  $\models$ . É fácil concluir que

$$\begin{aligned} \|\text{true}\| &= \mathbb{P} \\ \|\text{false}\| &= \emptyset \\ \|\phi_1 \wedge \phi_2\| &= \|\phi_1\| \cap \|\phi_2\| \\ \|\phi_1 \vee \phi_2\| &= \|\phi_1\| \cup \|\phi_2\| \end{aligned}$$

As propriedades modais, vistas como conjuntos de processos, formam uma álgebra booleana (basta verificar que são fechadas para as operações de intersecção e complementação e que satisfazem os axiomas usuais, cuja verificação é sugerida como exercício).

Mas como vamos interpretar  $[K]\phi$  ou  $\langle K \rangle \phi$ ? Tal como a conjunção é interpretada pela intersecção e a disjunção pela reunião, também os conectivos modais dão origem a funções (unárias) entre conjuntos de processos. Vamos designar essas funções por  $\|[K]\|$  e  $\|\langle K \rangle\|$ , respectivamente. Por

exemplo,  $\| [K] \|$  faz corresponder a um conjunto  $X$  de processos um outro conjunto de processos cujas derivadas imediatas por acções em  $K$  constituem  $X$ . Formalmente,

$$\| [K] \| = \lambda_{X \subseteq \mathbb{P}} . \{ F \in \mathbb{P} \mid \text{se } F \xrightarrow{a} F' \text{ e } a \in K \text{ então } F' \in X \}$$

De forma similar se define  $\| \langle K \rangle \|$ ,

$$\| \langle K \rangle \| = \lambda_{X \subseteq \mathbb{P}} . \{ F \in \mathbb{P} \mid \exists F' \in X, a \in K . F \xrightarrow{a} F' \}$$

Note-se que o efeito destas funções é operar, em cada processo em  $X$ , uma redução ao “estado anterior” indexada pelas acções em  $K$ . Tal como acontece com as interpretações dos conectivos booleanos usuais, estas são igualmente funções *monótonas* relativamente à inclusão de conjuntos, *i.e.*,

$$\text{Se } X_1 \subseteq X_2 \text{ então } \| [K] \| (X_1) \subseteq \| [K] \| (X_2) \text{ e } \| \langle K \rangle \| (X_1) \subseteq \| \langle K \rangle \| (X_2)$$

Além disso não é difícil mostrar que as funções  $\| [K] \|$  e  $\| \langle K \rangle \|$  verificam as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \| [K] \| (\mathbb{P}) &= \mathbb{P} \\ \| \langle K \rangle \| (\emptyset) &= \emptyset \\ \| [K] \| (X_1 \cap X_2) &= \| [K] \| (X_1) \cap \| [K] \| (X_2) \\ \| \langle K \rangle \| (X_1 \cup X_2) &= \| \langle K \rangle \| (X_1) \cup \| \langle K \rangle \| (X_2) \end{aligned}$$

Podemos, agora, completar a tabela anterior, de interpretação das fórmulas modais, definido,

$$\begin{aligned} \| [K] \phi \| &= \| [K] \| (\| \phi \|) \\ \| \langle K \rangle \phi \| &= \| \langle K \rangle \| (\| \phi \|) \end{aligned}$$

#### Nota 4 [Álgebra Modal]

Dissemos acima que a correspondência entre fórmulas e conjuntos de processos fornecia uma definição alternativa da semântica da lógica modal. Notemos, porém, que, em rigor, a definição estrutural de  $\| \cdot \|$  para o caso dos conectivos modais só é válida assumindo que trabalhamos num universo de processos fechado para a relação de transição, o que é o caso de  $\mathbb{P}$ .

Feito este último comentário, o que é interessante é que obtivemos um novo *modelo* para a lógica de sabor mais algébrico, em alternativa ao que já tínhamos (*i.e.*, os sistemas de transição ou, genericamente, as estruturas relacionais). De facto, e seguindo um procedimento usual em Matemática, podemos olhar estes conjuntos de processos e operadores sobre eles (*e.g.*  $\cap$ ,  $\emptyset$ ,  $\| [K] \|$ , ...) como objectos e operadores abstractos que respeitam determinados axiomas equacionais. Podemos, assim, definir a noção de *álgebra modal*:

**Definição.** Uma álgebra modal é um tuplo  $(P, 1, \cap, \neg, \{ \| [x] \| \mid x \in Act \})$  onde  $(P, 1, \cap, \neg)$  forma uma álgebra booleana e, para cada  $x \in Act$ , o operador  $\| [x] \| : P \rightarrow P$  verifica  $\| [x] \| (1) = 1$  e  $\| [x] \| (m \cap n) = \| [x] \| (m) \cap \| [x] \| (n)$ .

Note-se que os restantes operadores —  $0$ ,  $\sqcup$  e  $\| \langle x \rangle \|$  — são definidos por abreviatura; em particular  $\sqcup \stackrel{\text{abv}}{=} \neg \cap \neg$  e  $\| \langle x \rangle \| \stackrel{\text{abv}}{=} \neg \| [x] \| \neg$ .

Esta linha de raciocínio é ilustrativa de uma estratégia mais geral, e muito bem sucedida, em Lógica. Trata-se de traduzir conceitos e problemas da lógica em termos algébricos, aplicar, de seguida, os métodos da Álgebra Universal na sua resolução e traduzir a solução de novo para a linguagem da Lógica. Esta estratégia corresponde a uma disciplina própria — a *Lógica Algébrica* — que se iniciou com De Morgan, no final do século XIX, quando a procura de estruturas correspondentes à lógica proposicional clássica conduziu à formulação das familiares álgebras booleanas. As álgebras modais, que acabamos de introduzir, desempenham um papel análogo relativamente à lógica modal [BRV95].

Historicamente, as álgebras modais constituíram um dos primeiros modelos para a lógica modal. De facto, a ponte entre ambas surgiu num artigo, hoje clássico, de Jónsson e Tarski em 1951 [JT51], cerca de uma década antes do desenvolvimento da semântica relacional que temos vindo a adoptar, por Kripke e outros [Kri63].

Tal como os sistemas de transição, as álgebras modais podem ser classificadas de acordo com certas condições adicionais que verificam. No caso dos sistemas de transição estas surgem como propriedades da família de relações que os definem (e.g. simetria, serialidade, etc.). Nas álgebras modais tais condições tomam usualmente a forma de um conjunto de equações — um exemplo típico é o caso das *álgebras dinâmicas* de V. Pratt [?] que constituem a contrapartida algébrica de certas lógicas (modais) dos programas imperativos.

A correspondência entre estes dois modelos semânticos (relacional e algébrico) é muito útil quando queremos raciocinar sobre propriedades exprimíveis neste tipo de lógicas. Recordemos que esta nossa incursão algébrica se tornou necessária para tentar definir o significado das propriedades temporais dos processos. De facto, cada sistema de transição determina uma álgebra modal sobre a potência do respectivo conjunto de estados, como vimos, de forma particular, para o caso do sistema  $(\mathbb{P}, \{ \overset{x}{\rightarrow} \mid x \in Act \})$ . Dualmente, as álgebras modais determinam sistemas de transição, segundo uma construção similar à do teorema da representação das álgebras booleanas [Sto36].

## Propriedades Temporais Como Limites

Como dissemos, pretendemos ver as propriedades temporais como *limites* de propriedades modais sobre as transições elementares dos processos. Esta visão das propriedades tem uma analogia com a semântica operacional dos processos. De facto, as computações, que constituem o alvo deste tipo de propriedades, resultam do encadeamento, potencialmente não finito, dessas transições.

Raciocinemos, pois, por analogia. Quando queremos exprimir padrões comportamentais complexos, e também eles potencialmente não finitos, o mecanismo que utilizamos é a recursão sobre  $\mathbb{P}$ , introduzida através da igualdade definicional ( $\triangleq$ ). Que sentido fará introduzir o mesmo mecanismo nas fórmulas modais? Certamente escrever

$$X \triangleq \langle a \rangle \text{true}$$

não levanta qualquer dificuldade:  $X$  é apenas uma fórmula verificável exactamente pelos mesmos processos que verificam  $\langle a \rangle \text{true}$ . Mas que diremos, por exemplo, de

$$X \triangleq \langle a \rangle X$$

Sabemos que uma maneira de interpretar as fórmulas modais é associa-las aos conjuntos de processos que as satisfazem. Em particular, a interpretação de  $\langle a \rangle X$  é uma função em  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  que ao conjunto de processos que satisfazem  $X$ , qualquer que ele seja, faz corresponder o conjunto  $\|\langle a \rangle\|(X)$ , do processos que através da realização de pelo menos uma transição por  $a$  conduzem a processos que satisfazem  $X$ . Assim, podemos interpretar a fórmula  $X \triangleq \langle a \rangle X$  como uma *equação* em  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  cujas soluções são os pontos fixos da função

$$\lambda_{X \subseteq \mathbb{P}} . \|\langle a \rangle\|(X)$$

Note-se que, por um ligeiro abuso de notação, identificamos a variável lógica  $X$  com uma variável sobre  $\mathbb{P}$  (em rigor, deveríamos ter escrito  $\|X\|$  na função acima).

A questão interessante é, agora, saber como caracterizar os pontos fixos da função em causa, *i.e.*, os subconjuntos  $S \subseteq \mathbb{P}$  que verificam

$$S = \|\langle a \rangle\|(S)$$

A resolução deste tipo de equações não levanta problemas de maior. Contudo, o domínio em que as temos de resolver (*i.e.*, o espaço  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$ ) é consideravelmente menos rico em propriedades

algébricas que, por exemplo, o corpo dos reais. Não disporemos, portanto, de algoritmos expeditos comparáveis.

Vimos atrás que a função  $\lambda_{X \subseteq \mathbb{P}} \cdot \|\langle a \rangle\|(X)$  era monótona relativamente à inclusão de conjuntos, propriedade que, de resto, é partilhada pela interpretação em  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  dos outros conectivos modais. Isto basta para podermos, no cálculo das soluções que procuramos, recorrer a um resultado clássico sobre a existência de pontos fixos de funções monótonas em reticulados completos — o *teorema de Knaster-Tarski*.

Instanciando este resultado para o reticulado  $(\mathcal{P}(\mathbb{P}), \subseteq)$ , concluímos que o *menor* dos pontos fixos de uma função monótona pode ser calculado como a intersecção generalizada (*i.e.*, o ínfimo no reticulado em causa) do conjunto dos respectivos pré-pontos fixos. Estes, por sua vez, são aqueles elementos  $S$  de  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  tais que  $f(S) \subseteq S$ . Dito de outro modo, e para o caso que nos interessa, são aqueles conjuntos de processos que verificam

$$\|\langle a \rangle\|(S) \subseteq S$$

Ora, conhecendo nós a definição do operador  $\|\langle a \rangle\|$ , podemos re-escrever a condição acima sob a forma de um predicado sobre os processos que fazem parte desses pré-pontos fixos. Diremos, assim, que  $S$  é um pré-ponto fixo de  $\lambda_{X \subseteq \mathbb{P}} \cdot \|\langle a \rangle\|(X)$  sse

$$(PRE) \quad \text{Se } E \in \mathbb{P} \wedge E' \in S \wedge E \xrightarrow{a} E' \text{ então } E \in S$$

Vejamos que conjuntos  $S$  satisfazem esta condição. Claramente, o conjunto  $\{A \triangleq a.A\}$  verifica-a. Mas o mesmo se passa com o conjunto vazio (de facto se a premissa é falsa podemos concluir o que quisermos acerca do conseqüente da implicação). Chegamos, deste modo, à nossa primeira decepção: a fórmula, que parecia tão promissora, equivale a uma fórmula que é satisfeita pelo conjunto vazio de processos, *i.e.*, à fórmula false!

Felizmente, porém, esta não é a única solução da equação em mãos. Por verificação directa encontramos outra — o conjunto  $\{A \triangleq a.A\}$ . O teorema de Knaster-Tarski não nos diz como obter uma solução arbitrária para a equação (foi um “golpe de vista” que nos conduziu a  $\{A \triangleq a.A\}$  ...), mas, contudo, fornece um método para calcular o outro ponto fixo extremo, *i.e.*, o *maior* ponto fixo. De acordo com o teorema, este é calculado pela reunião generalizada (*i.e.*, o supremo no reticulado em causa) do conjunto dos post-pontos fixos da função, *i.e.*, daqueles subconjuntos  $S$  de  $\mathbb{P}$  tais que

$$S \subseteq \|\langle a \rangle\|(S)$$

De novo podemos traduzir esta condição sob a forma de um predicado (POST) de acordo com,

$$(POST) \quad \text{Se } E \in S \text{ então } E \xrightarrow{a} E' \text{ para algum } E' \in S$$

Qual será o maior subconjunto de  $\mathbb{P}$  que verifica esta condição? A condição afirma que, se um processo pertence a  $S$ , então pode realizar a acção  $a$  e o processo que resulta dessa realização pertence igualmente a  $S$ . Podemos, assim, concluir que o maior subconjunto de  $\mathbb{P}$  que verifica esta condição é o conjunto dos processos que apresentam pelo menos uma computação infinita da forma

$$E \xrightarrow{a} E_1 \xrightarrow{a} E_2 \xrightarrow{a} E_3 \xrightarrow{a} \dots$$

Conseguimos, pois, exprimir à custa do maior ponto fixo da equação modal, a seguinte propriedade temporal:

$\phi =$  Em qualquer ponto da sua evolução, o processo tem sempre a possibilidade de realizar a acção  $a$

## O Caso Geral

Como este exemplo ilustrou, propriedades temporais podem ser formuladas como pontos fixos de determinadas equações. Equações que, como vimos, correspondem à interpretação em  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  de fórmulas do tipo  $X \triangleq \phi$ , sendo  $X$  uma variável proposicional e  $\phi$  uma fórmula modal onde  $X$  ocorre livre. A forma geral da interpretação em  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  destas equações é

$$X = f(X)$$

onde  $=$  é a igualdade entre conjuntos e  $f$  é uma função que transforma conjuntos de processos em conjuntos de processos de acordo com a ‘especificação em  $\phi$ ’, *i.e.*,

$$f = \lambda_{S \subseteq \mathbb{P}} . \{S/X\} \|\phi\|$$

onde  $\|\cdot\|$  é estendido a fórmulas com variáveis fazendo  $\|X\| = X$  (*i.e.*, a interpretação da variável lógica  $X$  é a variável em  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  igualmente designada por  $X$ ). Com auxílio do teorema de Knaster-Tarski podemos identificar a menor e a maior solução de uma equação deste tipo, ou seja o menor e o maior ponto fixo de  $f$ .

### Nota 5

Como atrás se referiu, para garantir a existência de pontos fixos extremos é necessária a monotonia de  $f$  relativamente a  $\subseteq$ , o que se pode verificar para a interpretação em  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  de todos os conectivos de  $\mathbb{L}_M$ . Aqui reside, porém, a razão pela qual se omitiu de  $\mathbb{L}_M$  o conectivo usual de negação. De facto, na sua presença nem todas as equações modais exibem pontos fixos extremos. Repare-se que, por exemplo em  $X = \neg X$ ,  $f$  não é monótona. É possível, contudo, introduzir  $\neg$  desde que se imponha que em qualquer equação, toda a ocorrência livre da variável  $X$  esteja guardada por um número par de negações.

Por vezes as duas soluções são coincidentes (logo, únicas), mas no caso geral são distintas e existem, não raro, outras soluções intermédias. Como não possuímos um processo sistemático de cálculo destas soluções intermédias, seremos forçados a viver sem elas. No entanto vamos frequentemente recorrer às soluções extremas. Temos, pois, necessidade de introduzir alguma notação para a elas nos referirmos. Assim, vamos representar por

$$\mu X . \phi$$

o menor ponto fixo de  $f$  acima e por

$$\nu X . \phi$$

o maior ponto fixo. No exemplo em mãos, mostramos que  $\mu X . \langle a \rangle \text{true}$  é equivalente a  $\text{false}$ , enquanto  $\nu X . \langle a \rangle \text{true}$  garante a existência de pelo menos uma computação infinita de  $as$ . De modo análogo, a fórmula  $\nu X . \langle \tau \rangle \text{true}$  caracteriza os processos que se podem comprometer numa sequência infinita de acções não observáveis, ou seja, os processos *divergentes*.

Se o conectivo modal fôr parametrizado por um conjunto de acções  $K \subseteq \text{Act}$ , o processo que verifique  $\nu X . \langle K \rangle \text{true}$  pode realizar uma computação infinita composta por uma sequência qualquer de acções em  $K$ . Em particular, fazendo  $K$  coincidir com o próprio  $\text{Act}$ , a fórmula  $\nu X . \langle - \rangle \text{true}$  representa os processos que possuem pelo menos uma computação (qualquer) infinita, *i.e.*, que têm a possibilidade de exibir um comportamento perpétuo.

Vimos, também, que no cálculo destes pontos fixos é útil exprimir as condições  $f(X) \subseteq X$  e  $X \subseteq f(X)$  em termos dos elementos de  $X$ , *i.e.*,

$$\begin{aligned} \text{(PRE)} \quad & \text{Se } E \in \mathbb{P} \text{ e } E \in f(X) \text{ então } E \in X \\ \text{(POST)} \quad & \text{Se } E \in X \text{ então } E \in f(X) \end{aligned}$$



respectivamente.

**Exemplo:**  $X \triangleq \phi \vee \langle a \rangle X$

Vamos investigar novas equações modais, aplicando esta estratégia para tentar caracterizar outras propriedades temporais. Começemos, pois, por considerar a equação

$$X \triangleq \phi \vee \langle a \rangle X$$

A função implícita é

$$f \triangleq \lambda_{X \subseteq \mathbb{P}} . \|\phi\| \cup \|\langle a \rangle\|(X)$$

Vamos desenvolver a condição que define os seus pré-pontos fixos. Assim,

$$\begin{aligned} \text{(PRE)} \quad & \text{Se } E \in \mathbb{P} \text{ e } E \in f(X) \text{ então } E \in X \\ & \equiv \text{Se } E \in \mathbb{P} \text{ e } E \in (\|\phi\| \cup \|\langle a \rangle\|(X)) \text{ então } E \in X \\ & \equiv \text{Se } E \in \mathbb{P} \text{ e } E \in \{F \mid F \models \phi\} \cup \{F \in \mathbb{P} \mid \exists_{F' \in X} . F \xrightarrow{a} F'\} \text{ então } E \in X \\ & \equiv \text{Se } E \in \mathbb{P} \text{ e } E \models \phi \vee \exists_{E' \in X} . E \xrightarrow{a} E' \text{ então } E \in X \end{aligned}$$

O menor conjunto de processos que verifica esta condição é formado por processos que possuem pelo menos uma computação ao longo da qual são capazes de realizar a acção  $a$  até a propriedade  $\phi$  se verificar. Note-se, porém, e aqui está um ponto fundamental, que existe mesmo, nessa computação, um estado em que  $\phi$  se verifica. E isto porque, ao tomar a intersecção destes conjuntos, ficamos com aqueles que atingem o estado em que  $\phi$  se verifica num número *finito* de passos.

Vejamos, agora, qual será o maior dos pontos fixos de  $f$ . Para isso vamos “desenrolar” a condição que caracteriza os respectivos post-pontos fixos.

$$\begin{aligned} \text{(POST)} \quad & \text{Se } E \in X \text{ então } E \in f(X) \\ & \equiv \text{Se } E \in X \text{ então } E \in (\|\phi\| \cup \|\langle a \rangle\|(X)) \\ & \equiv \text{Se } E \in X \text{ então } E \in \{F \mid F \models \phi\} \cup \{F \in X \mid \exists_{F' \in X} . F \xrightarrow{a} F'\} \\ & \equiv \text{Se } E \in X \text{ então } E \models \phi \vee \exists_{E' \in X} . E \xrightarrow{a} E' \end{aligned}$$

O maior ponto fixo é formado tomando a reunião de todos os post-pontos fixos. Isto significa, neste exemplo, que nele vamos incluir não apenas os processos que podem realizar  $a$  até à verificação de  $\phi$ , mas também aqueles que mantêm a possibilidade de realizar  $a$  indefinidamente, sem nunca chegar a atingir um estado que verifique  $\phi$ .

Em resumo, diremos que tanto  $\mu X . \phi \vee \langle a \rangle X$  como  $\nu X . \phi \vee \langle a \rangle X$  exprimem propriedades do tipo “qualquer coisa acontece até se atingir um estado em que outra propriedade se verifica”. No primeiro caso, porém, este até é *estrito*, no sentido em que o estado em causa acaba por ser alcançado num número finito de passos. No segundo o estado que satisfaz  $\phi$  pode nunca ser atingido.

Dois casos particulares desta propriedade são particularmente relevantes na especificação de sistemas concorrentes. O primeiro consiste em substituir  $a$  por  $\tau$ . Neste caso,

$$\mu X . \phi \vee \langle \tau \rangle X$$

indica que, após a eventual realização de alguma actividade interna, o processo que satisfaz este requisito alcança um estado que verifica  $\phi$ . Note-se que este é precisamente o significado da fórmula  $\langle \rangle \phi$  discutido atrás e que em  $\mathbb{L}_M$  não podíamos introduzir por abreviatura.

O outro caso com interesse surge quando se toma o conjunto  $Act$  como parâmetro do operador modal. De facto

$$\mu X . \phi \vee \langle - \rangle X$$

significa que existe uma computação em que se alcança um estado que verifica a propriedade  $\phi$  após um número finito de transições. Repare-se que esta é uma propriedade de *animação fraca*. *Animação* porque afirma a ocorrência de qualquer coisa (no caso, da evolução para um estado que verifica  $\phi$ ) algures num determinado ponto da vida do processo, mas *fraca* porque essa garantia é dada, apenas, relativamente a uma computação. De facto, o processo poderia evoluir através de outra computação que nunca alcançasse o tal estado que valida  $\phi$ .

**Exemplo:**  $X \triangleq \phi \wedge \langle a \rangle X$

Consideremos, agora, a seguinte equação

$$X \triangleq \phi \wedge \langle a \rangle X$$

A condição (PRE) toma a forma

$$(PRE) \quad \text{Se } E \in \mathbb{P} \text{ e } E \models \phi \wedge \exists_{E' \in X} . E \xrightarrow{a} E' \text{ então } E \in X$$

Fazendo  $X = \emptyset$  tornamos falso o antecedente da implicação, pelo que (PRE) resulta verdadeira. Daqui concluímos que  $\emptyset$  é um pré-ponto fixo da função que resulta da interpretação em  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  do lado direito da equação modal. Claramente a intersecção do conjunto dos pré-pontos fixos será também ela vazia. Assim,  $\mu X . \phi \wedge \langle a \rangle X$  é equivalente a false. A condição (POST), porém, re-escreve em

$$(POST) \quad \text{Se } E \in X \text{ então } E \models \phi \wedge \exists_{E' \in X} . E \xrightarrow{a} E'$$

o que nos faz concluir que o maior ponto fixo, *i.e.*,

$$\nu X . \phi \wedge \langle a \rangle X$$

será o conjunto de processos que verificam  $\phi$  e, simultaneamente, exibem uma computação infinita da forma

$$E \xrightarrow{a} E_1 \xrightarrow{a} E_2 \xrightarrow{a} E_3 \xrightarrow{a} E_4 \xrightarrow{a} \dots$$

Dito de outro modo, um processo que verifique esta fórmula exibe a capacidade de realização perpétua da acção  $a$  ao longo da qual a propriedade  $\phi$  permanece válida. Este é claramente um requisito de *segurança*.

Poderíamos ser um pouco mais exigentes e requerer ainda que a propriedade  $\phi$  permanecesse válida ao longo de uma computação por  $a$  infinita ou *finita*, *i.e.*, conducente a um estado terminal do processo. Esta variante toma a forma

$$\nu X . \phi \wedge (\langle a \rangle X \vee [a]\text{false})$$

No caso geral, para um conjunto  $K \subseteq Act$ , exigir que  $\phi$  se verifique durante uma realização *maximal* de acções em  $K$  (*i.e.*, uma computação infinita ou finita desde que terminal), constitui uma propriedade de *segurança fraca* e exprime-se, como esperavamos, por

$$\nu X . \phi \wedge (\langle K \rangle X \vee [K]\text{false})$$

ou, ainda, para  $K = Act$ , por

$$\nu X . \phi \wedge (\langle - \rangle X \vee [-]\text{false})$$

**Exemplo:**  $X \triangleq [-]X$

Vamos terminar com um exemplo um pouco surpreendente. Consideremos a equação

$$X \triangleq [-]X$$

O maior ponto fixo coincide com o próprio  $\mathbb{P}$ . De facto,

$$\begin{aligned} \text{(POST)} \quad & \text{Se } E \in X \text{ então } E \in \llbracket [-] \rrbracket(X) \\ & \equiv \text{Se } E \in X \text{ então } (\text{se } E \xrightarrow{x} E' \text{ e } x \in \text{Act} \text{ então } E' \in X) \end{aligned}$$

Dito de outro modo, o resultado de uma transição qualquer em qualquer processo que pertença a um post-ponto fixo  $X$ , ainda pertence a  $X$ . É imediato que o maior subconjunto de  $\mathbb{P}$  que verifica esta condição é ele próprio.

Mais curiosa é a análise dos pré-pontos fixos. Temos,

$$\text{(PRE)} \quad \text{Se } E \in \mathbb{P} \text{ e } (\text{se } E \xrightarrow{x} E' \text{ e } x \in \text{Act} \text{ então } E' \in X) \text{ então } E \in X$$

Claramente, o processo  $\mathbf{0}$  pertence a qualquer conjunto  $X$  que verifique (PRE). Por outro lado, um processo que realize uma qualquer transição e derive em  $\mathbf{0}$  pertence igualmente a  $X$ , uma vez que  $\mathbf{0} \in X$ . Mas agora todo o processo que derive por uma qualquer transição noutra que, por sua vez, derive em  $\mathbf{0}$ , deve ser ainda considerado em  $X$ . E assim sucessivamente. O menor  $X$  que verifica a condição é então o conjunto de todos os processos finitos. Assim, a propriedade  $\mu X. [-]X$  estabelece, para um processo que a verifique, a impossibilidade de este realizar uma computação infinita. Versões menos fortes deste requisito são obtidas substituindo  $\text{Act}$  por um seu subconjunto  $K$ . Nesse caso a propriedade exprime a ausência de computações infinitas com acções em  $K$ .

## 6 Taxonomia das Propriedades Temporais

### Segurança e Animação

Acabamos de ver como que é possível exprimir propriedades de animação e segurança através, respectivamente, do menor e do maior ponto fixo de determinadas equações. Nos exemplos em causa, tratavam-se de propriedades de animação e segurança *fracas*, na medida em que formulavam uma eventualidade (no primeiro caso) e uma invariância (no segundo) sobre apenas, pelo menos, uma computação. Quer dizer, um processo que verifique qualquer dessas fórmulas pode evoluir realizando computações que, de facto, não validam os requisitos pretendidos.

Recordemos que uma propriedade de animação fraca pode ser expressa pela fórmula

$$\mu X. \phi \vee \langle - \rangle X$$

Intuitivamente isto significa que existe pelo menos uma computação em que um estado que verifique  $\phi$  pode ser alcançado<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Como de costume, substituindo  $\text{Act}$  por um qualquer  $a \in \text{Act}$  ou  $K \subseteq \text{Act}$ , obtemos versões relaxadas da propriedade na medida em que as computações consideradas não são quaisquer mas as geradas por  $a$  ou pelas acções em  $K$ . Geralmente iremos concentrar a nossa atenção no caso em que  $K = \text{Act}$ , mas tudo o que afirmarmos permanece válido para as versões relaxadas.

Qual será o complementar desta propriedade? Se um processo  $E$  não a verifica, então é porque todos os estados, alcançáveis ao longo de qualquer uma das suas computações, verificam a propriedade complementar de  $\phi$ , i.e.,  $\phi^c$ . Se, por mera cosmética, fizermos  $\psi = \phi^c$ , tal requisito escreve-se como

$$\nu X . \psi \wedge [-]X$$

como se pode facilmente verificar. Propriedades deste tipo são ditas de *segurança forte* (repare-se que agora são consideradas *todas* as computações).

Temos, pois, que propriedades de *segurança forte* e de *animação fraca* são complementares. Atrás definimos, estruturalmente, a noção de fórmula complementar. Podemos, agora, alargar essa definição às formulas do tipo  $\mu X . \phi$  e  $\nu X . \phi$ . De facto, se uma propriedade é o menor (maior) ponto fixo da equação modal

$$X \triangleq \phi$$

então a propriedade complementar é o maior (menor) ponto fixo da equação

$$X \triangleq \phi^c$$

Formalmente,

$$\begin{aligned} (\mu X . \phi)^c &= \nu X . \phi^c \\ (\nu X . \phi)^c &= \mu X . \phi^c \end{aligned}$$

Em exemplo anteriores já deparamos com este tipo de situação. Mostramos, por exemplo, que, enquanto  $\nu X . \langle \tau \rangle X$  exprime *divergência*, a fórmula complementar garantia *convergência* (i.e., comportamento não observável finito). De facto,  $(\nu X . \langle \tau \rangle X)^c = \mu X . (\langle \tau \rangle X)^c = \mu X . [\tau]X$ .

Vamos aplicar o mesmo raciocínio à fórmula que na acima usamos para exprimir a segurança fraca. Devemos chegar à formulação de uma propriedade que traduza um requisito de *animação forte*. De facto, o complementar de uma garantia de que existe uma computação ao longo da qual  $\phi$  se verifica, é a possibilidade de, em todas as computações, ser possível alcançar um estado que verifique o complementar de  $\phi$ . O complemento de

$$\nu X . \phi \wedge (\langle - \rangle X \vee [-]\text{false})$$

será

$$\mu X . \psi \vee ([-]X \wedge \langle - \rangle \text{true})$$

com  $\psi = \phi^c$ . Esta última fórmula afirma, precisamente, que será alcançado (finitamente) um estado que verifique  $\psi$ . Trata-se de uma típica propriedade de *animação*.

Sumariando, temos que *segurança* e *animação* são propriedades complementares. Não é motivo de surpresa que a primeira recorra ao maior ponto fixo (dada a necessidade de postular uma garantia ao longo de toda uma vida do processo) e a segundo ao menor (porque as “coisas desejáveis” devem ser observáveis em tempo finito).

## Acções e Estados

Há, no entanto, uma outra distinção em que é necessário pensar. Consideremos a propriedade de *animação forte* sobre a Rede de Táxis:

$\phi_0 = A$  viatura acaba por regressar à Central

Se regressar à Central for modelado pela acção  $reg$ , podemos escrever

$$\mu X . \langle reg \rangle \text{true} \vee ([-]X \wedge \langle - \rangle \text{true})$$

O que aqui se diz, de facto, é que todas as computações do processo viatura alcançam um estado em que é possível realizar a acção  $reg$ , facto expresso na sub-fórmula  $\langle reg \rangle \text{true}$ . Mas isto é diferente de afirmar que  $reg$  efectivamente ocorre.

O que está em causa é a possibilidade de formularmos as propriedades de animação (forte) sobre os estados ou sobre a ocorrência das acções. No primeiro caso garantimos que um estado com certas características é alcançado. No segundo, gostaríamos de dizer que uma determinada acção ocorre. No exemplo em mãos diríamos, então,

$$\mu X . [-reg]X \wedge \langle - \rangle \text{true}$$

A forma geral desta propriedade será, para garantir a realização de uma acção em  $K \subseteq Act$ ,

$$\mu X . [-K]X \wedge \langle - \rangle \text{true}$$

Por seu lado, a fórmula complementar desta é

$$\nu X . \langle -K \rangle X \vee [-] \text{false}$$

que, naturalmente, representa uma propriedade de segurança fraca dirigida, não aos estados, como a que acima consideramos, mas à ocorrência das acções.

A relevância desta distinção *estados-acções* pode ser ilustrada pelo seguinte exemplo. Consideremos os processos

$$A_0 \triangleq a. \sum_{i \geq 0} A_i \quad \text{com} \quad A_{i+1} \triangleq b.A_i$$

$$B_0 \triangleq a. \sum_{i \geq 0} B_i + \sum_{i \geq 0} B_i \quad \text{com} \quad B_{i+1} \triangleq b.B_i$$

Não é difícil verificar que o processo  $(A_k \mid A_k)$ , para um  $k > 0$ , verifica a propriedade

$$\mu X . [-a]X \wedge \langle - \rangle \text{true}$$

*i.e.*, garantidamente  $a$  acaba por ocorrer. No entanto, falha a propriedade

$$\mu X . (\langle - \rangle \text{true} \wedge [-a] \text{false}) \vee (\langle - \rangle \text{true} \wedge [-]X)$$

que afirma ser alcançável um estado em que  $a$  seja inevitável. De facto, os dois processos podem evoluir de forma que, em qualquer momento, um deles, pelo menos, ofereça a possibilidade de realizar  $b$ . Já o processo  $(B_k \mid B_k)$ , para um  $k > 0$ , falha as duas propriedades anteriores, mas verifica

$$\mu X . \langle a \rangle \text{true} \vee (\langle - \rangle \text{true} \wedge [-]X)$$

um requisito de animação que afirma ser sempre alcançável um estado em que  $a$  é possível (podendo, contudo, nunca ocorrer e, muito menos, surgir como inevitável).

Notemos, por fim, que esta distinção entre propriedades sobre os estados e propriedades sobre as acções não faz sentido quando discutimos propriedades de segurança forte. De facto, dizer que

um conjunto  $K$  de acções nunca ocorre é equivalente a dizer que todos os estados em qualquer computação verificam  $[K]\text{false}$ , *i.e.*,

$$\nu X . [K]\text{false} \wedge [-]X$$

Verifica-se imediatamente, por complementação, que a mesma distinção é irrelevante no caso das propriedades de animação fraca.

### Propriedades Condicionais

O poder expressivo da lógica modal com pontos fixos é surpreendentemente elevado. Muitas propriedades podem, de facto, ser formuladas combinando as formas básicas estudadas atrás. Por exemplo, suponhamos que queremos exprimir

$\phi_1 =$  *Após a recolha de um passageiro (icr), o táxi tem de o conduzir ao destino (fcr)*

A segunda parte de  $\phi_1$  é um requisito de animação forte que exprimimos na forma

$$\mu X . [-fcr]X \wedge \langle - \rangle \text{true}$$

Porém, esta propriedade só tem de se verificar após o início de uma corrida. Se escrevermos apenas

$$[icr](\mu X . [-fcr]X \wedge \langle - \rangle \text{true})$$

estamos a dizer muito pouco — apenas que todas as transições por *icr* a partir do estado inicial conduzem a estados que verificam o referido requisito de animação. O que, em verdade, queremos é especificar que isso mesmo acontece irrelevantemente do estado de evolução do processo Viatura. Ou seja, estamos perante um requisito de segurança forte. Mais exactamente, um requisito de animação *embebido* num requisito de segurança forte. A propriedade  $\phi_1$  traduz-se, pois, por

$$\nu Y . [icr](\mu X . [-fcr]X \wedge \langle - \rangle \text{true}) \wedge [-]Y$$

Podemos designar este tipo de propriedades por *propriedades condicionais*. Neste caso trata-se de animação condicional, mas podemos igualmente pensar em segurança condicional. Um exemplo é a propriedade que garante que, sempre que uma dada propriedade  $\phi$  se torna verdadeira, outra propriedade  $\psi$  não pode deixar de o ser (ou seja, nunca é possível ter-se  $\psi^c$ ). Diríamos, pois,

$$\nu Y . (\phi^c \vee (\phi \wedge \nu X . \psi \wedge [-]X)) \wedge [-]Y$$

Outra possibilidade consiste em fixar um requisito de segurança após a eventual ocorrência de uma acção. Por exemplo, e de novo no processo Vaitura da rede de táxis, podemos especificar que

$\phi_2 =$  *É possível alcançar estados a partir dos quais o regresso à garagem (reg) não pode ocorrer.*

O requisito de segurança é aqui a impossibilidade de regresso que formalizamos como

$$\nu X . [reg]\text{false} \wedge [-]X$$

Vamos, agora, combina-lo com a propriedade de animação (fraca) que traduz a possibilidade desta situação se verificar. Assim,

$$\mu Y . (\nu X . [reg]\text{false} \wedge [-]X) \vee \langle - \rangle Y$$

Um outro tipo de propriedades condicionais que já encontramos são as que se formulam em termos de um *até*. Por exemplo,

$$\mu X . \psi \vee (\phi \wedge \langle - \rangle \text{true} \wedge [-]X)$$

*i.e.*, em todas as computações  $\phi$  verifica-se até  $\psi$  se verificar. Este *até* é estrito, o que significa que  $\psi$  acaba por se verificar em todas as computações (note-se que esta situação é distinta da analisada atrás, onde consideramos um *até* estrito mas *fraco*). Esta restrição pode ser removida complementando o ponto fixo, *i.e.*,

$$\nu X . \psi \vee (\phi \wedge \langle - \rangle \text{true} \wedge [-]X)$$

Se retirarmos a parcela  $\langle - \rangle \text{true}$ , que força o progresso do sistema, obtemos

$$\nu X . \psi \vee (\phi \wedge [-]X)$$

Ou seja, em todas as computações (incluindo as finitas)  $\phi$  é válido *a menos que*  $\psi$  se verifique. Aqui não faz sentido forçar a verificação de  $\psi$ .

### Propriedades Cíclicas

O tipo mais comum de propriedades que afirmam a recorrência de determinados padrões comportamentais é a classe das propriedades cíclicas. Por exemplo,

$\phi_4 =$  *Em toda a computação de um determinado processo de gestão de memória, out ocorre em segundo, quarto, sexto, ..., 2n-ésimo lugar.*

traduz-se por

$$\nu X . [-]([\text{-out}] \text{false} \wedge [-]X)$$

Ou, mais realisticamente, poderíamos requerer que a cada *in* se seguisse um *out*, embora outras acções pudessem ocorrer entre estas. Diríamos, então,

$$\mu X . [\text{out}] \text{false} \wedge [\text{in}] (\mu Y . [\text{in}] \text{false} \wedge [\text{out}]X \wedge [\text{-out}]Y) \wedge [\text{-in}]X$$

Note-se que o uso de menores pontos fixos estabelece a condição adicional de ser finita a quantidade de transições que podem ocorrer entre um *in* e um *out*.

Um pouco mais complexas, mas muito frequentes na especificação de sistemas concorrentes são propriedades do tipo

$\phi_5 =$  *Um estado em que in é possível é alcançado um número infinito de vezes*

ou

$\phi_6 =$  *A acção in pode ocorrer um número infinito de vezes.*

As fórmulas que exprimem estas condições são, respectivamente,

$$\nu X . \mu Y . (\langle \text{in} \rangle \text{true} \vee \langle - \rangle Y) \wedge ([-]X \wedge \langle - \rangle \text{true})$$

e

$$\nu X . \mu Y . [-in]Y \wedge [-]X \wedge \langle - \rangle \text{true}$$

Trocando os operadores de ponto fixo no último exemplo, e substituindo  $[-]X \wedge \langle - \rangle \text{true}$  por  $[in]X$  obtemos

$$\mu X . \nu Y . [-in]Y \wedge [in]X$$

que exprime a possibilidade de *in* ocorrer um número finito de vezes. Note-se que todas estas propriedades são *fortes*, na medida em que realizam uma quantificação implícita sobre todas as computações.

## 7 O $\mu$ -calculus Modal

Acabamos de ver que as propriedades temporais dos processos são exprimíveis numa extensão à lógica modal  $\mathbb{L}_M$ . Tal extensão consiste simplesmente em introduzir dois novos (mas poderosos) operadores que modelam os pontos fixos extremos da interpretação em  $\mathcal{P}(\mathbb{P})$  de equações modais. Uma vantagem deste procedimento reside no facto de não termos tido necessidade de introduzir uma nova lógica, nem sequer um novo modelo para a lógica que vinhamos utilizando, surgindo esta como um fragmento bem caracterizado do caso geral.

O “caso geral” é aqui precisamente a lógica  $\mathbb{L}_M$  enriquecida com pontos fixos e um conjunto  $X$  de variáveis proposicionais. Esta constitui o  $\mu$ -calculus modal [Koz83], que aqui vamos designar por  $\mathbb{L}_{\mu M}$ . Juntemos, pois, os cromos num esforço de sistematização. Assim,

- As fórmulas bem formadas da lógica são-no de acordo com o seguinte BNF:

$$\phi ::= X \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \phi_1 \vee \phi_2 \mid \langle K \rangle \phi \mid [K] \phi \mid \mu X . \phi \mid \nu X . \phi$$

onde  $K \subseteq Act$  e  $X$  é um conjunto de variáveis.

Note-se que as constantes *true* e *false* podem definir-se por abreviatura como

$$\text{true} \stackrel{\text{abv}}{=} \nu X . X \quad \text{e} \quad \text{false} \stackrel{\text{abv}}{=} \mu X . X$$

Da mesma forma, e como vimos atrás, as modalidades observáveis, antes introduzidas primitivamente em  $\mathbb{L}_M$ , surgem, agora, como simples abreviaturas de limites. De facto,

$$\begin{aligned} \langle \rangle \phi &\stackrel{\text{abv}}{=} \mu X . \phi \vee \langle \tau \rangle X \\ [ ] \phi &\stackrel{\text{abv}}{=} \nu X . \phi \wedge [ \tau ] X \\ [ \downarrow ] \phi &\stackrel{\text{abv}}{=} \mu X . \phi \wedge [ \tau ] X \end{aligned}$$

Notemos que a definição de  $[ ] \phi$  é complementar da de  $\langle \rangle \phi$ . Por outro lado,  $[ \downarrow ] \phi$  define-se como o *menor* ponto fixo da mesma fórmula usada na definição do operador  $[ ] \phi$ . Esta escolha garante que nesse caso, ao contrário do que sucede com  $[ ] \phi$ , é excluída a capacidade de realização infinita de acções não observáveis.

- Tal como a sintaxe, a semântica é apenas uma extensão da noção de modelo que já tínhamos para a lógica modal simples. Seguindo a abordagem atrás esboçada, vamos considerar que a relação de satisfação  $\models$  é definida indirectamente em termos dos conjuntos  $\|\phi\|$  (*i.e.*, os conjuntos de processos que validam a fórmula  $\phi$ ).



Tendo introduzido variáveis na linguagem, é forçoso considerar modelos parametrizados por *valorações*, ou seja, funções que a cada variável atribuem o conjunto de processos em que esta toma o valor true. Formalmente,

$$V : X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P})$$

Obviamente, o cálculo da semântica das fórmulas é relativo à valoração das variáveis livres considerada. Assim, definimos,

$$\begin{aligned} \|X\|_V &= V(X) \\ \|\phi_1 \wedge \phi_2\|_V &= \|\phi_1\|_V \cap \|\phi_2\|_V \\ \|\phi_1 \vee \phi_2\|_V &= \|\phi_1\|_V \cup \|\phi_2\|_V \\ \|[K]\phi\|_V &= \|[K]\|(\|\phi\|_V) \\ \|\langle K \rangle \phi\|_V &= \|\langle K \rangle\|(\|\phi\|_V) \end{aligned}$$

Até aqui nada de novo: apenas indexamos os conjuntos que interpretam as fórmulas pela valoração  $V$  e incluímos uma cláusula própria para dizer que a interpretação de uma variável é o conjunto que a valoração considerada lhe associa. Para o caso das fórmulas cujo conectivo principal é um operador de ponto fixo, teremos, como seria de esperar à luz da discussão anterior,

$$\begin{aligned} \|\nu X . \phi\|_V &= \bigcup \{S \in \mathbb{P} \mid S \subseteq \|\phi\|_{\{S/X\}V}\} \\ \|\mu X . \phi\|_V &= \bigcap \{S \in \mathbb{P} \mid \|\phi\|_{\{S/X\}V} \subseteq S\} \end{aligned}$$

De facto, toda a fórmula  $\phi$  determina uma função *monótona* entre conjuntos de processos, que a cada  $S \subseteq \mathbb{P}$  faz corresponder o conjunto  $\|\phi\|_{\{S/X\}V}$ , relativa à valoração  $V$  e à variável  $X$ . Assim, as interpretações das fórmulas  $\nu X . \phi$  e  $\mu X . \phi$  traduzem, respectivamente, e de acordo com o teorema de Knaster-Tarski, o maior e o menor ponto fixo dessa função.

Notemos, por fim, que o conjunto das fórmulas que não incluem variáveis livres é fechado para a complementação.

A noção de equivalência modal introduzida no início do capítulo permanece válida em  $\mathbb{L}_{\mu M}$ . Mas o que é muito mais interessante é o facto de os dois resultados sobre a relação entre ela e a bissimulação continuarem a verificar-se. O segundo resultado — *processos com imagem finita, modalmente equivalentes, são bissimilares* — decorre directamente uma vez que a única coisa que fizemos foi estender a lógica. Infelizmente, e ao contrário do que diria alguma (falsa) intuição, a restrição aos processos com imagem finita não pode ser relaxada. O primeiro resultado — *processos bissimilares são modalmente equivalentes* — está exaustivamente demonstrado em [Sti95]. À luz da discussão acima obtemos imediatamente o facto de estes resultados permanecerem válidos para o fragmento da lógica baseado nas modalidades observáveis.

---

#### Nota 6

Terminamos aqui o estudo das lógicas para processos. Foi nossa opção não dar uma panorâmica das inúmeras abordagens disponíveis, mas estudar uma delas com alguma profundidade.

A lógica estudada — o  $\mu$ -calculus modal — foi inicialmente proposto em [Koz83], aplicando ao caso modal uma extensão que se tem revelado fecunda em outro tipo de lógicas: a inclusão de operadores de ponto fixo. Trata-se de uma lógica finitária e proposicional que apresenta duas vantagens importantes:

- é decidível e

- dotada de um grande poder expressivo (estritamente mais expressiva que lógicas como PDL e CTL\* muito populares nas ciências da computação).

Entre os vários tópicos que não puderam ser abordados neste curso, encontra-se um que é de vital importância: o estudo dos métodos de prova para o  $\mu$ -calculus modal. De facto, o cálculo de pontos fixos pelo teorema de Knaster-Tarski torna-se pouco expedito, e de difícil compreensão, para fórmulas em que surgem diversos conectivos  $\mu$  e  $\nu$ . O seu cálculo mais sistemático pode ser feito calculando os limites de cadeias de Kleene, uma vez que as funções que interpretam as fórmulas modais são, não apenas monótonas, mas também, em certas condições, *contínuas*. O processo, exemplificado com detalhe em [Sti95], é instrutivo (na medida em que o próprio cálculo das aproximações aumenta a nossa compreensão intuitiva do significado da fórmula), embora para processos não finitos, os índices das cadeias tenham que se estender para lá do ordinal  $\omega$ .

---

## Referências

- [AS85] B. Alpern and F. B. Schneider. Defining liveness. *Information Processing Letters*, (21):181–185, 1985.
- [BRV95] P. Blackburn, M. de Rijke, and I. Venema. The algebra of modal logic. CWI Tech. Rep., CWI, Amsterdam, 1995.
- [Dij76] E. Dijkstra. *A Discipline of Programming*. Prentice-Hall, 1976.
- [HM85] M. C. Hennessy and A. J. R. G. Milner. Algebraic laws for non-determinism and concurrency. *Journal of ACM*, 32(1):137–161, 1985.
- [Hoa69] C. A. R. Hoare. An axiomatic basis for computer programming. *Comm. of ACM*, (12):576–580, 1969.
- [Jon86] Cliff B. Jones. *Systematic Software Development Using VDM*. Series in Computer Science. Prentice-Hall International, 1986.
- [JT51] B. Jónsson and A. Tarski. Boolean algebras with operators. *American Journal of Mathematics*, 78:891–939, 1951.
- [Koz83] D. Kozen. Results on the propositional mu-calculus. *Theor. Comput. Sci.*, 27:333–354, 1983.
- [Kri63] S. Kripke. Semantical analysis of modal logic I: normal propositional calculi. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, (9):67–96, 1963.
- [Lam77] L. Lamport. Proving the correctness of multiprocess programs. *IEEE Trans. Software Engineering*, (3):125–143, 1977.
- [Lam83] L. Lamport. What good is temporal logic? In R. E. A. Mason, editor, *Proc. IFIP 9th World Congress*, pages 657–668. North Holland, 1983.
- [Mil89] R. Milner. *Communication and Concurrency*. Series in Computer Science. Prentice-Hall International, 1989.
- [MP90] Z. Manna and A. Pnueli. A hierarchy of temporal properties. In *Proc. 9th ACM Symp. on Principles of Distributed Computing*, pages 377–408, 1990.
- [Sti92] C. Stirling. Modal and temporal logics. In S. Abramsky, D. Gabbay, and T. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science (vol. 2)*, pages 478–551. Oxford Science Publications, 1992.
- [Sti95] C. Stirling. Modal and temporal logics for processes. *Springer Lect. Notes Comp. Sci. (715)*, pages 149–237, 1995.
- [Sto36] M. Stone. The Theory of Representation for Boolean Algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (40):37–111, 1936.